

# El plano proyectivo

## Guía para una lección

Felipe Cano

Valladolid, 27 de mayo de 2026

### 1 La topología del plano proyectivo real

Como sabemos, los elementos del plano proyectivo real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  son las rectas afines que pasan por el origen de  $\mathbb{R}^3$  (rectas vectoriales). Se dota de la topología cociente asociada a la aplicación

$$\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$$

que a cada punto  $P$  de la superficie esférica  $\mathbb{S}^2$  asocia la recta afín  $\pi(P)$  que pasa por  $P$  y por el origen. La fibra  $\pi^{-1}(\pi(P))$  del elemento  $\pi(P)$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  es el conjunto  $\{P, -P\}$ , donde  $-P$  es el punto antipodal de  $P$  en la superficie esférica unidad  $\mathbb{S}^2$ . De este modo, se tiene que  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  es un espacio topológico compacto y la proyección  $\pi$  es un espacio recubridor universal, de donde se sigue que el grupo fundamental  $\Pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$  es el grupo de dos elementos  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Imaginamos en  $\mathbb{S}^2$  la relación de equivalencia antipodal y adoptamos una nomenclatura geográfica para referirnos a  $\mathbb{S}^2$ . Así, la unión de los dos casquetes polares es un cerrado saturado, que define en el plano proyectivo una región  $D$  homeomorfa al disco unidad. el complementario del interior de  $D$  se identifica con una banda de Moebius, de acuerdo con la figura.

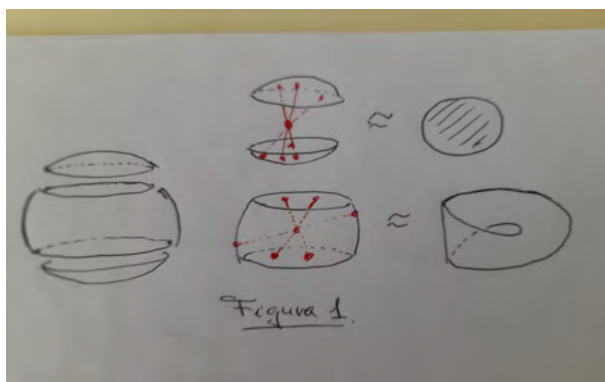


FIGURA 1: EL PLANO PROYECTIVO REAL, UNIÓN DE UN DISCO Y UNA BANDA DE MOEBIUS.

El borde de esta banda de Moebius se corresponde a un lazo homótopo al lazo constante y el lazo central define un generador del grupo fundamental.

No entraremos en los conceptos exactos de orientabilidad, baste decir que el plano proyectivo real no es orientable, no se puede sumergir como un subespacio de  $\mathbb{R}^3$  y finalmente resulta ser el bloque básico para la descripción las superficies compactas no orientables.

Una breve reseña sobre la clasificación de superficies compactas y conexas. La descripción se efectúa a partir del toro  $T_2 = S^1 \times S^1$ , del plano proyectivo y de la suma conexa. La suma conexa de dos superficies se obtiene retirando un disco de cada una e identificando los bordes resultantes (ver figura 2). Argumentos combinatorios a partir de una triangulación dada muestran que toda superficie es suma conexa de toros y de planos proyectivos.

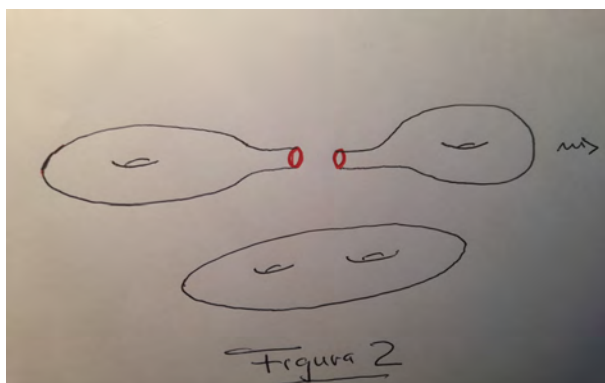


FIGURA 2:SUMA CONEXA DE DOS TOROS.

Más aún, la suma conexa de un plano proyectivo y un toro es homeomorfa a la suma conexa de tres planos proyectivos (el “baile” del plano proyectivo). De este modo toda superficie compacta y conexa es o bien suma conexa de una familia finita de toros (caso orientable), o bien suma conexa de una familia finita de planos proyectivos (caso no orientable).

## 2 El plano proyectivo sobre un cuerpo o sobre un anillo de división

Podemos construir espacios que reciban el nombre de plano proyectivo a partir del dato de un “anillo de división” de escalares  $F$ . Un anillo de división es lo mismo que un cuerpo conmutativo o no. Por ejemplo, si  $F$  es un cuerpo puede ser el cuerpo de los racionales, de los reales (aquí recuperamos  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ), de los números complejos, el cuerpo de fracciones de un anillo de polinomios, cuerpos finitos, como  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , con  $p$  un número primo, etcétera. En el caso de que sea un “genuino” anillo de división, es decir un cuerpo no conmutativo, me viene a la mente el cuerpo de los cuaterniones (tengo entendido que los físicos lo utilizan en cosmología, pero no sé dar detalles).

El plano proyectivo  $\mathbb{P}_F^2$  se obtiene dando en  $F^3 \setminus (0, 0, 0)$  la relación de equivalencia que identifica cada terna  $(x_0, x_1, x_2)$  con las ternas proporcionales

$$(x_0\lambda, x_1\lambda, x_2\lambda), \quad \lambda \in F \setminus \{0\}$$

Las rectas de  $\mathbb{P}_F^2$  son los conjuntos solución de una ecuación lineal

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0, \quad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in F^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

El lector observará la importancia de orden, por ejemplo, si se le ocurre construir el espacio dual formado por las rectas del plano  $\mathbb{P}_F^2$ .

En estos ejemplos de planos proyectivos se cumplen las siguientes propiedades:

P1. Por cada dos puntos distintos pasa una única recta. P2. Dos rectas distintas se cortan siempre en un único punto. P3. Existen tres puntos no alineados. P4. Toda recta tiene al menos tres puntos.

Podemos definir “plano proyectivo axiomático” como el dato de una pareja de conjuntos disjuntos, uno llamado de rectas y otro de puntos, dotada de una relación que diga si dados un punto y una recta son incidentes o no y que cumpla las propiedades (axiomas) P1, P2, P3 y P4. El plano proyectivo axiomático más pequeño tiene siete puntos y siete rectas y coincide con

el plano proyectivo construido sobre el cuerpo  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , recibe el nombre de plano de Fano y la configuración que lo describe se llama configuración de Fano, véase la figura.

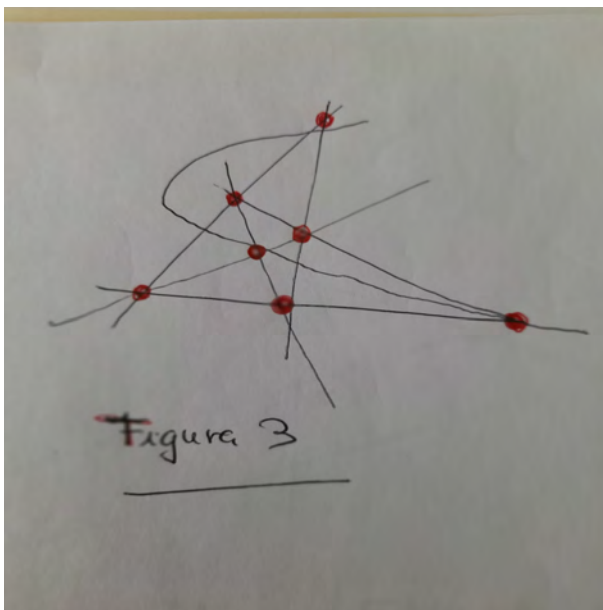


FIGURA 3: CONFIGURACIÓN DE FANO.

Por supuesto, una cuestión en la que nos vamos a centrar es saber si existen otros planos proyectivos axiomáticos aparte de los de la forma  $\mathbb{P}_F^2$  construidos sobre un anillo de división, así como la de satisfacer nuestra curiosidad por distinguir geoméricamente aquellos construidos sobre un cuerpo de los dados por un anillo de división no conmutativo.

### 3 La recta del infinito y el plano afín. Axiomas

Desde pequeños sabemos que las rectas paralelas se cortan en el infinito. No obstante la idea de infinito da siempre algo de miedo e incluso la sociedad puede rechazarla hasta bloquear la evolución de la ciencia (algo parecido a la historia de Galileo). Así, aunque parezca que Euclides fuera miope y se dedicara a un apreciación bastante local de su geometría euclídea, seguramente en su fuero interno supiera lo que es la recta del infinito, pero no

considerara prudente exteriorizarlo. La recta del infinito entra con fuerza en el Renacimiento, admitiendo que una pintura tiene dentro las operaciones básicas proyectivas de proyección y sección. Recomiendo echar un vistazo a la obra de Leonardo denominada “La adoración de los magos”.

Sea como fuere, ya nos hemos acostumbrado a que la recta del infinito, que puede ser cualquier recta del plano proyectivo, tiene como complementario el espacio afín y sus puntos son los puntos de confluencia de pares de rectas paralelas. En la figura 4 se representa el espacio afín  $\mathbb{R}^2$  como el complementario de la recta del infinito de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  dada por el plano vectorial  $z = 0$  a través de una proyección desde el centro de la esfera al plano afín  $z = 1$  de  $\mathbb{R}^3$ .

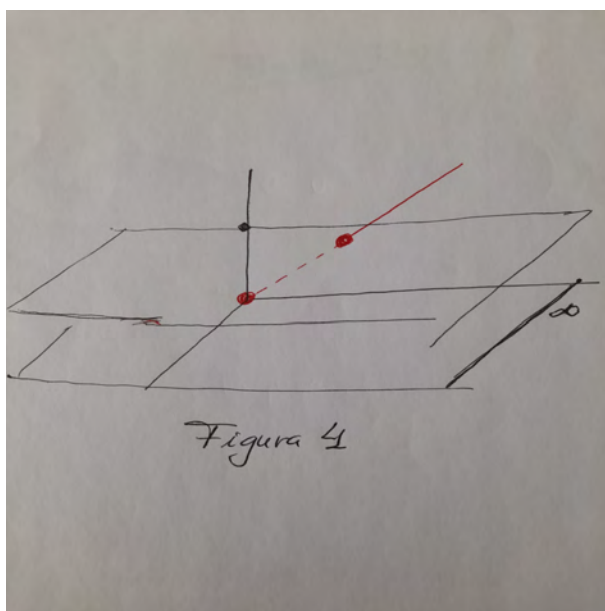


FIGURA 4: UNA CARTA AFÍN DEL PLANO PROYECTIVO.

Si observamos el “complementario” de una recta de un plano proyectivo, obtenemos una estructura de “plano afín axiomático” que se ajusta a axiomas tipo Euclides (olvidándonos de la métrica) que son los siguientes:

- A1. Dos puntos distintos pertenecen a una única recta.
- A2. Dada una recta y un punto exterior a ella se puede trazar una única paralela por dicho punto.
- A3. Existen tres puntos no colineales.

El plano afín axiomático más pequeño tiene cuatro puntos y seis rectas, se obtiene eliminando una recta de la configuración de Fano.

Por otro lado, dado un plano afín axiomático se puede completar hasta un único plano proyectivo añadiendo como recta del infinito el conjunto de clases de equivalencia de rectas paralelas.

Una observación notable es la siguiente. Si declaramos recta del infinito una recta dada de  $\mathbb{P}_F^2$ , con  $F$  un cuerpo, el plano afín que obtenemos tiene la misma estructura, es isomorfo al obtenido a considerar recta del infinito cualquier otra recta. Esta homogeneidad del plano proyectivo respecto de las rectas del infinito no es cierta para planos proyectivos axiomáticos cualesquiera. Como comentaremos más adelante, existen planos axiomáticos que dan lugar a planos afines no isomorfos al considerar el complementario de rectas del infinito diferentes.

## 4 Projectividades de Staudt y de Poncelet

En matemáticas, los objetos no son más que las transformaciones que se aplican sobre ellos (teoría de categorías, dualización sistemática de los espacio vectoriales, filosofía de Platón, etcétera). Muy particularmente las automorfismos. En el caso de los espacios proyectivos estas transformaciones se llaman projectividades, las tenemos de dos tipos:

- Projectividades según Poncelet. Son las que se obtienen como composición de perspectivas. Las perspectivas son básicamente proyecciones y secciones, en el más puro estilo de la geometría proyectiva. En la figura se ilustra una projectividad entre dos rectas de un plano.

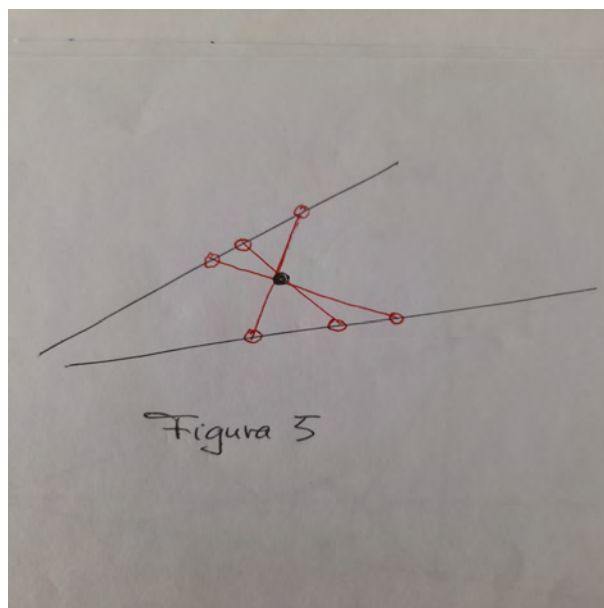


FIGURA 5: UNA PERSPECTIVIDAD.

- Proyectividades según Staudt. Definidas para espacios proyectivos sobre un cuerpo. Son biyecciones que conservan la estructura de incidencia. Más abstractas. Para el caso de planos sobre un cuerpo, mezclan geometría con álgebra.

Un ejemplo de proyectividad según Staudt que no es de Poncelet es el dado por la conjugación de todas las coordenadas en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  identificado a las clases de proporcionalidad de ternas  $(z_0, z_1, z_2)$  en  $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Toda proyectividad según Staudt tiene asociado un automorfismo del cuerpo base, si es la identidad, es de Poncelet.

## 5 La razón doble

El invariante proyectivo por excelencia, de hecho el único en cierto sentido, es la razón doble  $\mathcal{RD}(A, B, C, D)$  de cuatro puntos alineados  $A, B, C, D$ . La definición contiene implícitamente que trabajamos sobre un cuerpo y que podemos leer los puntos en coordenadas afines (aunque esto último no es necesario). Se expresa como el cociente de las razones simples  $\mathcal{RS}(B, C, D)$  y  $\mathcal{RS}(A, C, D)$ , siendo estas últimas el cociente de las longitudes (afines) de los segmentos  $BC$  y  $BD$ , respectivamente  $AC$  y  $AD$ .

Como hemos dicho, la propiedad principal de la razón doble es que permanece invariante por proyectividades de Poncelet. Aquí se vislumbra una aplicación moderna de la geometría proyectiva al reconocimiento automático de formas: la razón doble de cuatro puntos significativos en el rostro de una persona es la misma vista en una fotografía lejana, cercana o desde ángulos diferentes.

## 6 Cuaternas armónicas

En un plano proyectivo axiomático cualquiera, diremos que cuatro puntos alineados  $A, B, C, D$  forman una cuaterna armónica, o bien que  $D$  es un cuarto armónico de  $A, B, C$ , si responden a la construcción siguiente:

*Tomamos una recta  $\ell$  desde el punto  $C$ , distinta de la recta  $r$  dada por  $A, B, C$  y fijamos en ella dos puntos  $P, Q$  distintos y distintos de  $C$ . Consideramos los puntos*

$$R = AP \cap BQ, \quad S = AQ \cap BP$$

*y definimos el cuarto armónico  $D = \mathcal{CA}(A, B, C; \ell, P, Q)$  como la intersección  $D = r \cap RS$ .*

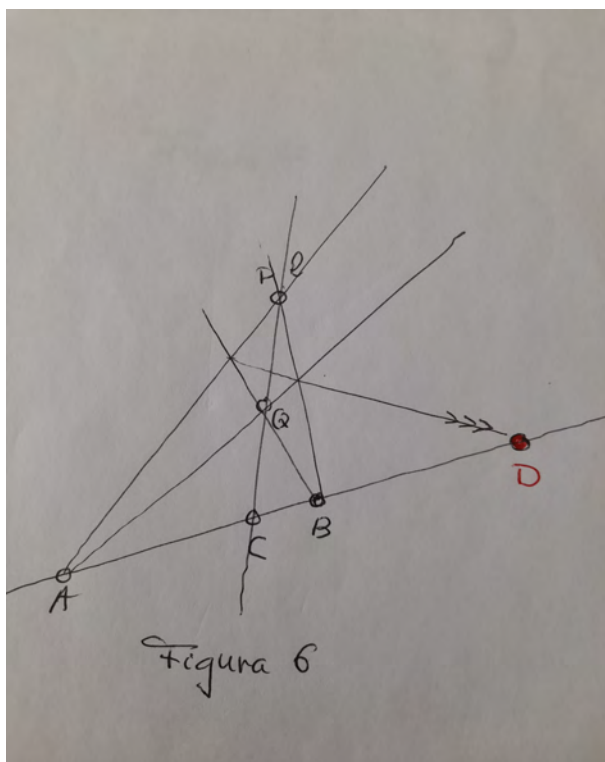


FIGURA 6: CUARTO ARMÓNICO.

La unicidad del cuarto armónico de tres puntos alineados está garantizada en los planos de tipo  $\mathbb{P}_F^2$  construidos sobre un anillo de división. En el caso de que  $F$  sea un cuerpo la razón doble de  $A, B, C, D$  es igual a  $-1$ .

Hay una definición un poco más general, de “sexteto armónico”. Se dice que seis puntos alineados  $A', A'', B', B'', C', D'$  según una recta  $r'$  forman un sexteto armónico si existe una configuración como antes para el cuarto armónico de modo que

$$\begin{aligned} A' &= r' \cap AP, & A'' &= r' \cap AQ, \\ B' &= r' \cap BP, & B'' &= r' \cap BQ, \\ C' &= r' \cap PQ, & D' &= r' \cap RS. \end{aligned}$$

Diremos que  $D'$  es un sexto armónico de  $A', A'', B', B'', C'$ . La existencia y unicidad del sexto armónico está garantizada en planos proyectivos sobre un anillo de división.

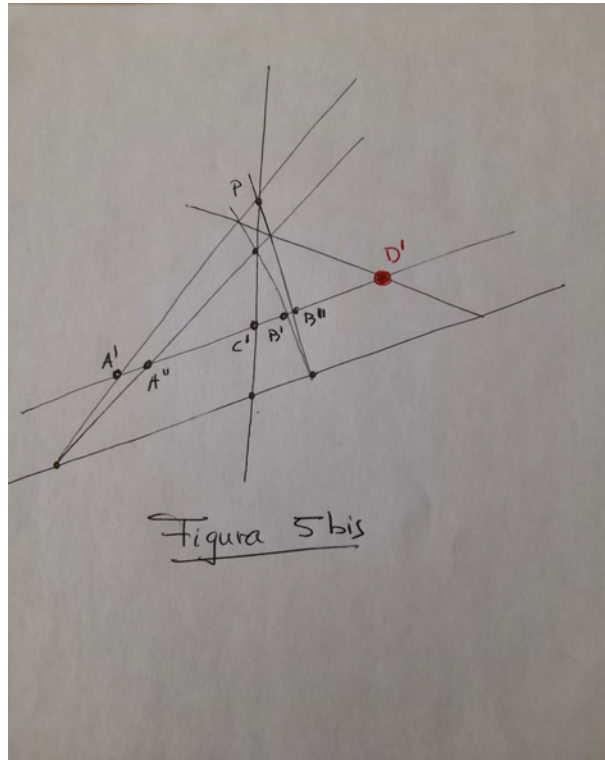


FIGURA 5BIS: SEXTO ARMÓNICO.

Como veremos más adelante estos resultados de existencia y unicidad implican de hecho la existencia de un anillo de división para el plano proyectivo dado.

## 7 La configuración de Desargues. Planos no desarguesianos

Dos triángulos en un plano proyectivo axiomático están en “posición homológica” si están inscritos ambos en tres rectas concurrentes. El axioma de Desargues se enuncia como sigue

P.5 Los tres puntos obtenidos como intersección de los lados correspondientes de dos triángulos en posición homológica están alineados.

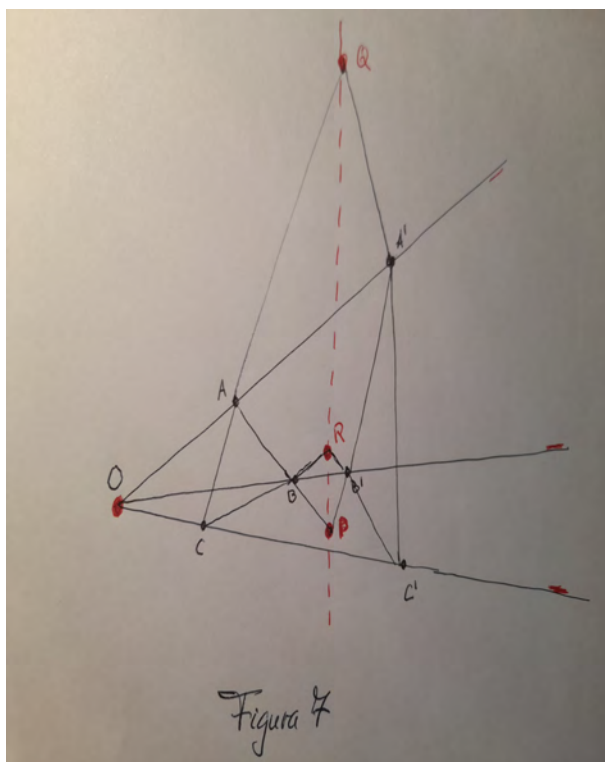


FIGURA 7: CONFIGURACION DE DESARGUES.

En particular se tiene una configuración  $10_3$ , diez puntos, diez rectas, cada recta con tres puntos, por cada punto pasan tres rectas.

Un plano proyectivo axiomático que satisfaga el axioma de Desargues, se denominará “desarguesiano” (algunos lo llaman “arguesiano”, no sé por qué). Como se puede comprobar mediante ecuaciones, todo plano sobre un anillo de división es desarguesiano. El trabajo mediante ecuaciones en estos planos es muy similar al que podemos hacer en espacios vectoriales, una vez se determina una “referencia proyectiva”, cualquier familia de cuatro puntos tres a tres no alineados y se le asignan coordenadas. Entendemos que la mayoría de los presentes esta familiarizada con estos procedimientos y no incidiremos mucho en ello.

Existen planos no desarguesianos (incluso finitos no desarguesianos). Una manera elegante de ver esto, presentada por R. Hartshorne. Consiste en fabricar el plano proyectivo axiomático libre  $\Pi$  generado por una configuración  $\pi_0$  con al menos cuatro puntos (configuración: dos puntos están como máximo en una línea). Se añaden por turno puntos y rectas en una sucesión para re-

recuperar los axiomas de plano proyectivo axiomático. Esta construcción tiene una propiedad básica relevante: si existe una configuración confinada en  $\Pi$ , entonces también existe en  $\pi_0$ . Decimos que una configuración está confinada si cada punto está al menos en tres rectas y cada recta contiene al menos tres puntos. La configuración de Desargues está confinada. Si empezamos con  $\pi_0$  con solo cuatro puntos y ninguna recta, que no está confinada, entonces  $\Pi$  no puede contener una configuración de Desargues...

El ejemplo anterior muestra también que existen planos proyectivos axiomáticos que no admiten un anillo de división de escalares, pues estos últimos son desarguesianos.

## 8 Coordenadas en un plano desarguesiano. Unicidad del cuarto armónico y del sexto armónico

Veremos que todo plano desarguesiano admite un anillo de división. La idea es tratar de construir coordenadas de manera geométrica y probar que esta construcción permite recuperar las propiedades asociativa de la suma y el producto así como la conmutativa de la suma. Existe un modo de obtener estas propiedades con base en la existencia y unicidad del sexto armónico, que no detallaremos. No obstante, prestaremos atención a la existencia y unicidad del cuarto armónico, esencialmente el mismo problema.

En primer lugar, como es de esperar, fijaremos una recta  $\ell_h$ , dos puntos en ella que representan el 0 y el 1, un punto  $\infty \in \ell_h$ , una recta del infinito  $\ell_\infty$  tal que  $\infty = \ell \cap \ell_\infty$  y finalmente un punto unidad  $U$  que no pertenece a  $\ell \cup \ell_\infty$ . Identificaremos  $F$  con los puntos de  $\ell \setminus \{\infty\}$ . Hay que cumplir dos tareas:

- Definir las operaciones en  $F$  y probar que se obtiene un anillo de división.
- Probar que, con estas operaciones, el plano proyectivo de partida es isomorfo a  $\mathbb{P}_F^2$ .

No realizaremos completamente ninguna de ellas. Podemos definir las operaciones suma y producto, utilizando una recta (vertical)  $\ell_v$  auxiliar, de acuerdo con las figuras siguientes:



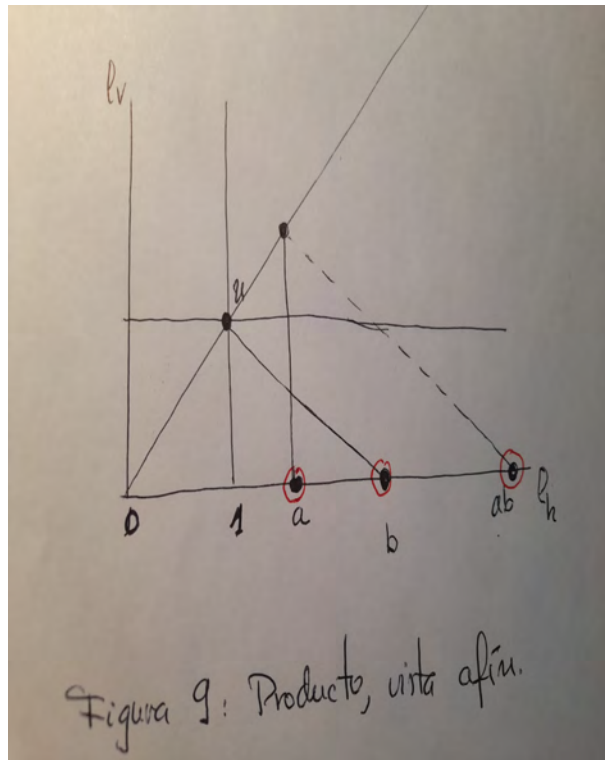


FIGURA 9: PRODUCTO.

Las operaciones se pueden expresar en términos de sextetos armónicos (no lo haremos por escasez de tiempo), lo que es clave para obtener las propiedades de asociatividad y conmutatividad de la suma deseadas, a partir de la unicidad del sexto armónico y las simetrías de la construcción del mismo.

Terminamos esta sección con dos figuras en las que se muestra la unicidad de cuarto armónico, de forma apenas ligeramente más simple que la del sexto armónico, en un plano desarguesiano. En la primera se muestra la unicidad cuando se cambia un punto de la recta  $l$ , la segunda se aplica al caso de modificar la recta  $l$  y es ligeramente más complicada.





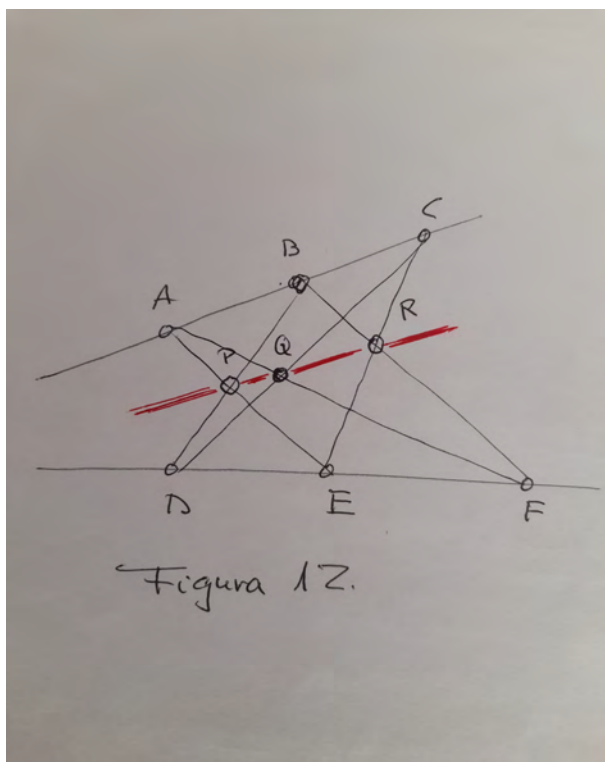


FIGURA 12: CONFIGURACION DE PAPPUS.

La unión  $r \cup t$  de dos rectas proyectivas puede considerarse una cónica degenerada (entendemos, ¿cómo no?, que todo alumno de segundo curso de matemáticas sabe lo que es una cónica proyectiva en el caso de un plano proyectivo sobre un cuerpo de característica distinta de dos). Así, el dato de una cónica  $\mathcal{C}$  y seis puntos sobre ella:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ D & E & F \end{array}$$

recibe el nombre de “hexagrama místico” y se cumple el Teorema de Pascal:

Los puntos  $P, Q, R$  obtenidos a partir de un hexagrama místico

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ D & E & F \end{array}$$

están alineados.

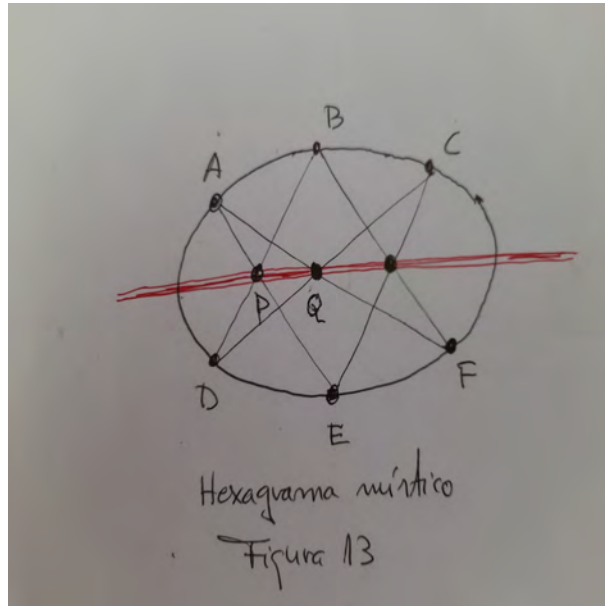


FIGURA 13: HEXAGRAMA MISTICO.

Para entendernos, utilizaremos la notación

$$\left. \begin{array}{ccc} A & B & C \\ D & E & F \end{array} \right\} \rightarrow (P, Q, R)$$

para indicar que  $P, Q, R$  han sido obtenidos de acuerdo con el axioma de Pappus (podría servir también para el teorema de Pascal, pero no lo necesitaremos).

## 10 Pappus implica Desargues

Con el fin de presentar una demostración (al menos sus líneas generales) probaremos el teorema de Hessenberg, que establece que Pappus implica Desargues, entendámoslo, suponiendo P1, P2, P3, y P4, veremos que P6 implica P5.

Comenzamos con dos triángulos en homología  $ABC$  y  $A'B'C'$ . Es decir, si llamamos  $s = AA'$ ,  $s = BB'$  y  $t = CC'$ , las rectas  $r, s, t$  son concurrentes en un punto que llamaremos  $O$ . Definimos los puntos

$$P = AB \cap A'B', \quad Q = AC \cap A'C', \quad R = BC \cap B'C'.$$

Queremos ver que  $P, Q$  y  $R$  están alineados. Comenzamos definiendo el punto  $S = A'C' \cap AB$ .

Aplicamos Pappus al hexagrama indicado

$$\left. \begin{array}{ccc} O & C & C' \\ B & S & A \end{array} \right\} \rightarrow (P_1, P_2, Q).$$

Ahora consideramos

$$\left. \begin{array}{ccc} O & B & B' \\ C' & A' & S \end{array} \right\} \rightarrow (P_2, P_3, P).$$

Finalmente consideramos

$$\left. \begin{array}{ccc} B & C' & P_2 \\ P_3 & P_1 & S \end{array} \right\} \rightarrow (R, P, Q)$$

y hemos terminado.

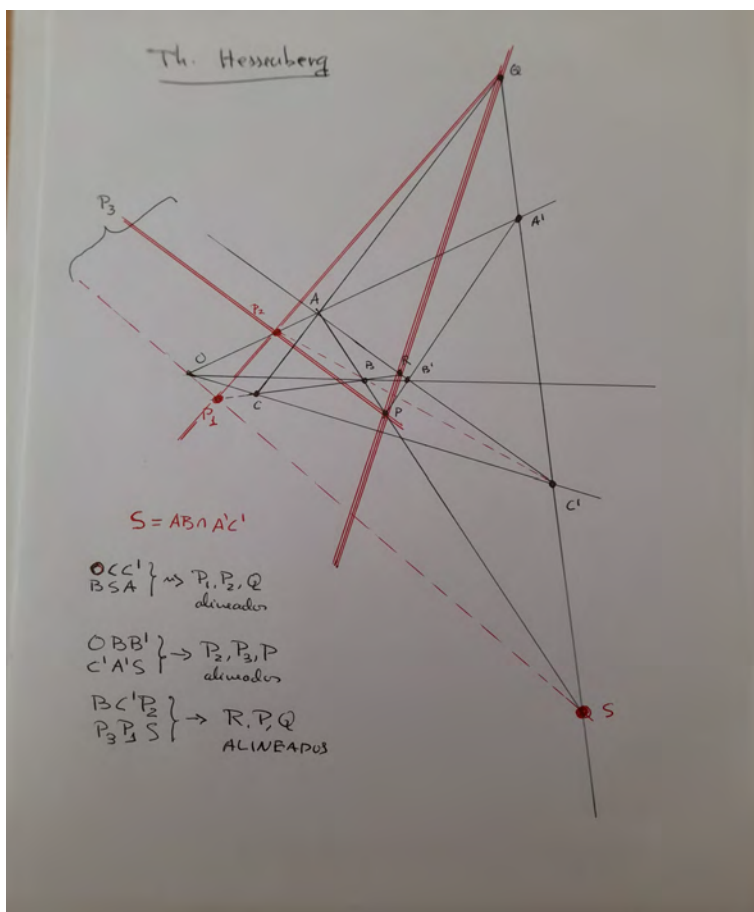


FIGURA 14: PAPPUS DESARGUES.

## 11 Planos proyectivos finitos. Teorema de Bruck-Ryser

Todas las rectas de un plano proyectivo axiomático finito tienen el mismo cardinal: es el orden del plano proyectivo más uno. Si el orden es  $\nu$ , el número de puntos del plano proyectivo es  $\nu^2 + \nu + 1$ . En el caso de planos  $\mathbb{P}_F^2$ , el orden coincide con el número de elementos de  $F$ , que siempre es potencia de un primo.

El teorema de Bruck-Ryser excluye ciertos números como orden de un plano proyectivo axiomático: todos aquellos naturales congruentes con 1 o 2 módulo 4 y cuyo cuadrado no sea suma de cuadrados. El 10 y el 12 son los primeros órdenes potenciales no excluidos, sobre los que hay una duda. Se cree con casi seguridad que no existen planos proyectivos axiomáticos de orden 10. Sin embargo, hasta donde sé, continúa abierta la pregunta de si existen planos proyectivos axiomáticos de orden 12.

Por otro lado, se sabe que existen exactamente cuatro planos proyectivos axiomáticos de orden 9 distintos entre sí, uno de ellos construido sobre un cuerpo, los otros tres no desarguesianos. Sin embargo, existen siete tipos diferentes de planos afines de orden 9: esto prueba que el complementario afín de una recta depende de la recta particular elegida.

---

Muchas gracias por la atención, y gracias a los que me enseñaron estas cosas, principalmente José Manuel Aroca.