DISCURSO DE INCORPORACIÓN A LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS DEL PERÚ
LIMA, 9 DE AGOSTO DE 2019

JORGE MOZO FERNÁNDEZ

Señoras y señores académicos.
Distinguidas autoridades.
Estimados colegas. Amigas y amigos. Señoras y señores.

Supone para mí un inmenso honor el haber sido nombrado como Académico Correspondiente de esta distinguida Academia Nacional de Ciencias del Perú. Tanto o más, si cabe, que si recibiera un honor similar en mi patria, España, puesto que considero al Perú como mi segunda patria científica, en dura competencia con la primera. No en vano he tenido la oportunidad de venir a este hermoso país en 14 ocasiones, y he tenido ocasión de conocer muchos de sus rincones, monumentos, paisajes y restaurantes en todo este tiempo.

La matemática, mi campo de trabajo, es quizás la ciencia más antigua de la que el hombre tiene constancia, junto probablemente con la astronomía, a la que está indisolublemente ligada. Las primeras civilizaciones de las que nos han llegado fuentes materiales con contenido matemático son la egipcia y la mesopotámica. Respecto a la primera, se conserva en el Museo Británico de Londres el Papiro Rhind, el cual consta de un cierto número de problemas matemáticos relacionados con el aprovechamiento y medida de los terrenos de cultivo, necesarios tras las inundaciones periódicas del Nilo. Por su parte, la tablilla conocida como *Plimpton 322*, conservada en la Universidad de Columbia, en Nueva York, escrita hacia 1800 a.C., contiene 15 filas y cuatro columnas de números, relacionados con lo que ahora llamamos *ternas pitagóricas*. Sí, esas ternas tienen que ver con el conocido teorema de Pitágoras (quizás el resultado mas universalmente popular de esta ciencia) que hemos aprendido en la escuela y que recitamos de manera mecánica: "la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa". Gracias a este teorema sabemos que si un cateto de un triángulo rectángulo mide 3 metros, y el otro cateto mide 4 metros, la hipotenusa medirá 5 metros, puesto que $3^2+4^2=5^2$. Así, si tomamos una cuerda que mida $3+4+5=12m$, y la configuramos en forma de triángulo con las proporciones mencionadas, tendremos de manera precisa un ángulo recto, sin necesidad de recurrir a escuadras, transportadores de ángulos, u otros instrumentos.

Este aspecto práctico de las matemáticas es lo que impulsó el desarrollo de las mismas durante los albores de su existencia, no adquiriendo carácter de ciencia lógica y racional (es decir, no empírica) hasta muchos siglos después. Se atribuye este cambio en el sentido de los resultados matemáticos a los griegos, y muy especialmente a Euclides, quien desarrolla sus *Elementos* de manera lógica a partir de un pequeño número de nociones comunes, y cinco axiomas, piedras edificantes de su magnífica obra. Por cierto, los contenidos de la tablilla mesopotámica citada hacen suponer que los babilónicos conocían el teorema de Pitágoras, mucho antes de la llegada al mundo del célebre matemático y filósofo de Samos.

Pese a este origen de la matemática, que se pierde en la noche de los tiempos, y a que, me atrevería a decir, todo el mundo reconoce el interés y la importancia de esta ciencia, base de tantas otras, la abstracción que caracteriza a una gran parte de esta disciplina hace muy difícil explicar en pocas palabras cuál es el objeto concreto de trabajo que desarrollamos. Supongo que a muchos de los que aquí estamos, y que desarrollamos labores de investigación, nos han preguntado alguna vez, de manera más o menos inocente, eso de "y tú, ¿qué es lo que investigas?". Frecuentemente el físico, el químico, el biólogo, por citar algunas ramas, pueden dar algunas ideas de su investigación comprensibles para un profano, pero eso mismo se hace mucho más difícil para un matemático, puesto que nuestro trabajo parece disociado de la realidad tangible en muchas ocasiones. De hecho, la pregunta anterior viene frecuentemente acompañada de otra: “¿Pero no se sabe ya todo en matemáticas?”.

Nosotros mismos somos conscientes de que frecuentemente no estudiamos las cosas por su aspecto práctico, sino por la belleza que encontramos en las mismas. El gran matemático francés H. Poincaré dijo que

> El científico no estudia la naturaleza por la utilidad que le pueda reportar; la estudia por el placer que le proporciona, y este placer se debe a que es bella. . .

Esta belleza no es siempre fácil de apreciar. La matemática iraní Maryam Mirzakhani, única mujer en la historia galardonada con la Medalla Fields, premio equivalente al Nobel en matemáticas, y tristemente desaparecida a temprana edad, afirmaba en una de sus citas más célebres que

> La belleza de las matemáticas sólo se muestra a sus seguidores más pacientes.

Por estos motivos se hace complicado, como digo, tratar de explicar en pocas palabras cuál es el objeto de estudio de un matemático, y más aún, hacerles a ustedes partícipes de la belleza que hay en ello. Si yo digo ahora que mis campos de trabajo son el estudio asintótico de las soluciones de ecuaciones diferenciales holomorfas, así como la clasificación analítica de las foliaciones de codimensión uno, esto no causaría en muchos de ustedes más allá que cierta perplejidad por el uso de tan rimbombantes términos. Sin embargo, el estudio de estos objetos se remonta a antiguo, quizás no tanto como los ejemplos puestos anteriormente, pero sí a varios siglos atrás.

Entre las figuras señeras que jalonan la historia de las matemáticas, y una de las más ligadas con los orígenes de los temas de trabajo que acabo de mencionar, quiero referirme a quien probablemente pueda considerarse como el más grande matemático de todos los tiempos, Leonhard Euler (con permiso del no menos insigne Carl Friedrich Gauss).

Nace en Basilea en 1707, y a los 14 años entra en la Universidad, en la que conoce a Johann Bernoulli, miembro de la mayor saga de matemáticos de todos los tiempos. Hizo rápidos progresos y a la edad de 20 años participó en una competición internacional propuesta por la Academia de París relativa a un problema sobre la posición de los mástiles en un barco, en la que quedó en segundo lugar. Posteriormente ganó dicha competición 12 veces. Daniel Bernoulli, hijo de su maestro, invitó a Euler a trabajar en la Academia de San Petersburgo. Los únicos puestos disponibles eran en medicina y fisiología, así que estudió estas materias para ganar el mismo, aunque afortunadamente para sus pacientes nunca llegó a ejercer dichas disciplinas. Allí tomó posesión de un puesto académico en la universidad, contrajo matrimonio y tuvo 13 hijos, de los que sólo 5 alcanzaron la edad adulta y 3 le sobrevivieron. Aceptó en 1741 un puesto en la Academia de Berlín, ofrecido por Federico el Grande, época en la que residió en Alemania y fue instructor de la princesa de Anhalt-Dessau. En este periodo en Alemania escribió la que quizás sea su obra cumbre, *Introductio in analysin infinitorum* (Introducción al análisis de los infinitos), entre otros cientos de artículos. De hecho, su actividad académica es ingente: es el matemático con una mayor producción en toda la historia de esta ciencia. Sus obras completas ocupan entre 60 y 80 volúmenes. Se le atribuye una prodigiosa memoria, estimulada probablemente por sus problemas de visión: perdió en 1735 la visión de un ojo a causa de una infección, aunque él lo atribuía a los trabajos de cartografía que realizaba. Sufrió posteriormente cataratas en el otro ojo, lo que le llevó a terminar completamente ciego. Su productividad no disminuyó, gracias a sus magníficas habilidades mentales: se dice que era capaz de recitar de memoria la Eneida de Virgilio, entre otras cosas.

A pesar de su ceguera siguió produciendo matemáticas de alto nivel, y aún en 1775 escribía una media de un artículo por semana además de escribir en esta época un tratado de álgebra, un volumen sobre el movimiento de la luna, y tres volúmenes sobre cálculo integral. Según el matemático francés François Arago,

> Euler calculaba sin esfuerzo aparente, como los hombres respiran o las águilas se sostienen en el aire.

Pide Laplace que

> Lean a Euler, lean a Euler, es el maestro de todos nosotros.

Y el propio Gauss afirma que

> El estudio de las obras de Euler no puede reemplazarse por ninguna otra cosa.

Volvió a San Petersburgo en 1766. Allí fallece su esposa en 1773, vuelve a contraer matrimonio con una hermanastra de su difunta esposa, y deja de existir en 1783. Hasta su último día estuvo trabajando en diversos problemas matemáticos.

Como ya he mencionado, su producción matemática es ingente, y no es este el lugar de detallarla. Voy a referirme únicamente a algunos conocidos resultados en los que Euler hizo contribuciones destacadas.

La ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado), está atravesada por el río Pregel, en el que había dos islas, y entre estas y las orillas un total de 7 puentes: de una de las islas cruzaban dos puentes hacia cada orilla, un puente a cada una desde la otra isla, y por último, un séptimo puente unía ambas islas. Sus habitantes tenían el pasatiempo de tratar de cruzar todos los puentes sin repetir ninguno. Euler demostró que tal hazaña era imposible, dando lugar a lo que hoy se conoce como teoría de grafos (concretamente, de grafos planos). Esquemáticamente, un grafo está formado por un conjunto de puntos, y ciertas líneas que unen algunos de esos puntos. Los puntos pueden representar puntos geográficos, o bien miembros de una familia de objetos, o multitud de otras cosas. Asimismo las líneas se interpretan como relaciones entre algunos de estos objetos. Los usos de la teoría de grafos son numerosísimos en diversos problemas. Uno de los más interesantes es el llamado problema del viajante. Imaginemos que cada punto del grafo representa una ciudad, y las líneas las carreteras que unen algunas de estas ciudades. Un viajante de comercio debe recorrer todas las ciudades, y por cuestiones económicas, debe tratar de realizar el trayecto más corto posible. Si el número de puntos es grande (pongamos, 50 puntos), analizar todas las posibles trayectorias una por una para determinar cuál es la más corta es inviable (el número es ingente), con lo que hallar un algoritmo que permita determinar esta ruta, en un tiempo computacionalmente razonable, es un problema de gran utilidad práctica. No se conoce aún la existencia de un tal algoritmo, y de hecho, el posible hallazgo del mismo es parte de lo que se conoce en computación como el problema $P = NP$, cuya solución, por otra parte, reportaría a su autor la nada desdeñable cantidad de un millón de dólares ofrecida por el instituto Clay. Les invito a intentarlo.

Existe asimismo un grafo muy célebre, probablemente el de mayor complejidad jamás ideado, y que todos los que estamos aquí empleamos a diario: se trata de grafo de Google. Aquí, cada punto del grafo representa un sitio web, y las líneas los enlaces entre páginas. Ser capaces de moverse de manera ágil por este grafo resulta imprescindible para agilizar las búsquedas que realizamos a diario a través de este servicio, y es sin duda necesario en esta época del Big Data que todo controla (nuestro particular Gran Hermano)

Se atribuye también a Euler la invención de la fórmula que relaciona, en un poliedro convexo (sin agujeros), su número de aristas, caras y vértices. Dicha fórmula afirma que $C + V = A + 2$. Por ejemplo, un cubo consta de 6 caras, 12 aristas, y 8 vértices. Es fácil mostrar con ayuda de la misma que, al contrario de lo que ocurre en geometría plana, donde hay una infinidad de polígonos regulares (uno por cada número de lados), en el espacio tridimensional no hay más que 5 poliedros regulares, a los que los griegos llamaban los sólidos platónicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro, y en los que Kepler basaba la armonía del universo. Aquellos de ustedes que sean aficionados al fútbol (yo no me cuento entre ellos, pero estoy seguro que los hay), habrán observado seguramente que un balón de fútbol no es una esfera perfecta, sino más bien un poliedro formado a base de hexágonos y pentágonos. Existen numerosos poliedros de estas características, y es un problema interesante el saber cuál de ellos tiene una forma más parecida a una esfera. Como curiosidad, a partir de la fórmula de Euler puede mostrarse que todos los poliedros construidos de esta forma tienen el mismo número de pentágonos, 12, con independencia del número de hexágonos de que consten.

Antes he aludido a la obra principal de Euler, la introducción al análisis de los infinitos. Es una materia obsesiva entre los matemáticos de toda época el infinito, ya sea como cardinal, o como medida del espacio. Algunos, como Georg Cantor, incluso sufrieron problemas mentales en su vida tras pasar una gran parte de la misma trabajando en el tema, y llegar a la asombrosa conclusión (demostrada) que en un pequeño segmento hay tantos puntos como en la totalidad del universo.

La relación de mi trabajo de investigación con los temas estudiados por Euler se encuentra precisamente aquí, en el infinito. Más concretamente en lo que se llaman las series numéricas. Se atribuye a Zenón de Elea la paradoja de Aquiles y la tortuga: ya saben, compiten en una carrera el veloz Aquiles y la lenta tortuga. Aquiles da a la tortuga una cierta ventaja inicial, para no abusar de su superioridad, y razona Zenón que Aquiles nunca podrá alcanzar a la tortuga: en efecto, cuando Aquiles llega a la posición en la que la tortuga estaba al empezar la competición, ésta habrá avanzado un cierto trecho. Seamos generosos con la tortuga y admitamos que ha recorrido la mitad de distancia que el héroe de Troya. Cuando Aquiles recorre esta mitad de distancia, la tortuga ya no está ahí, ha avanzado otra mitad más. Así hasta el infinito, habiendo una infinidad de puntos intermedios, y siendo finito el tiempo, Zenón concluye que Aquiles jamás dará alcance a la tortuga.

Esta falacia la explicamos hoy en día mediante la noción de serie geométrica. Si a una cantidad unidad, le sumamos la mitad de dicha cantidad, a continuación la mitad de dicha mitad, y así proseguimos de manera indefinida, en un proceso de paso al límite (concepto este desarrollado a partir de los trabajos de Euler, si bien no precisado de manera rigurosa hasta Cauchy), llegamos a una suma finita. Es decir, que en un tiempo finito el rápido y colérico protagonista de la Ilíada alcanzará al quelonio.

Este tipo de sumas infinitas que dan como resultado, tras un proceso de paso al límite, una suma finita, son las que los matemáticos conocemos como convergentes. Pero no son así todas las sumas de números progresivamente menores. Por ejemplo, si sumamos indefinidamente $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$, con suficiente paciencia (infinita paciencia realmente), podremos exceder cualquier cantidad que deseemos, por grande que sea. Divergencia es el nombre que recibe este fenómeno. Euler muestra entre otras cosas que las diferencias sucesivas entre dicha suma y el logaritmo neperiano de los sucesivos números naturales, es una cantidad finita, de hecho pequeña, número que se conoce hoy como la constante γ *gamma de Euler*, y que resulta ser uno de los más elusivos en matemáticas (poco se sabe sobre su carácter).

Uno de los problemas más célebres resueltos por Euler es el llamado problema de Basilea, que consistía en determinar el valor preciso de la suma infinita

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots.$$

Éste determina, a través de una prodigiosa demostración, que dicha suma toma el valor $\frac{\pi^2}{6}$: esto significa que, sumando una cantidad arbitrariamente alta de sumandos de la expresión mencionada nos acercaremos hasta rozar la suma de $\frac{\pi^2}{6}$, aunque esta siempre quedará un poco más allá de nuestro alcance. Esta es, sin duda, mi fórmula favorita entre todas las que constituyen el maravilloso mundo de las matemáticas. Cuesta mucho esfuerzo no rendirse a la misteriosa belleza que hace que sumando inversos de cuadrados de números naturales (los de contar), aparezca el número π, relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. La armonía que hay en dicha expresión es comparable a la de los más sublimes poemas de San Juan de la Cruz. Euler va más allá y calcula la suma de los recíprocos de las potencias cuartas de los naturales, y las sextas, octavas, etc. Las potencias impares han resultado ser mucho más esquivas, y a fecha de hoy poco se sabe sobre ellas.

Euler introduce varias de las notaciones matemáticas de uso común en nuestros días. El número e, sin duda el más ubicuo e importante de nuestra ciencia, que aparece desde el cálculo de probabilidades hasta en la fórmula del interés continuo, se debe a él. Así como la notación de funciones, o la consolidación del uso de la letra griega π para denotar la cantidad que hemos mencionado anteriormente.

Sin entrar en detalles, el estudio de en qué condiciones ciertas series que aparecen como solución de un tipo de ecuaciones, llamadas diferenciales, dan como suma una cantidad finita o no (son convergentes o divergentes), y qué consecuencias se puede extraer de ello, constituye uno de los temas a los que dedico más tiempo en mi trabajo investigador. El mundo convergente y divergente son de naturaleza completamente diferente: las series divergentes son una especie de espíritus intangibles que parecen no representar objetos materiales, al contrario que sus parientes convergentes. Cómo encarnar en nuestro mundo físico las series divergentes que surgen cómo solución de problemas naturales es uno de mis intereses matemáticos. Muy en particular, mis modestas contribuciones se centran en problemas que involucran más de una variable. Como pueden ver, soy uno de esos matemáticos a los que, entre otras cosas, el infinito les obsesiona.

Yo vengo de una tierra, Castilla, muy diferente a esta. Allí las llanuras se extienden sin obstáculo alguno, hasta el infinito. No tenemos estos portentosos Andes que actúan de barrera entre mundos. Es aquella una tierra de contrastes, gélida en invierno, abrasadora en verano. Eso da fama a las mujeres y hombres castellanos de recios y sobrios. Somos gente de pocas palabras y, dicen las malas lenguas, que de carácter difícil y cerrado. Es leyenda popular, quien sabe hasta qué punto cierta o no, que las gentes de mi tierra no somos de fácil amistad. Pero lo que es cierto es que, una vez que hemos hecho un amigo, este lo será para toda la vida, sin fisuras. Esa es la sensación que yo he tenido en el Perú. He tenido la suerte de conocer aquí a gente magnífica, entre los cuales me siento como en mi casa. Quiero agradecer en esta ocasión especialmente a dos personas, miembros ambos de esta noble Academia: al Dr. Percy Fernández, con quien trabajo desde el ya lejano año de 2004, y gracias al cual he incrementado mi relación con la ciencia de este país. Y al Dr. César Carranza, trabajador infatigable como Euler, quien promovió mi candidatura para que yo esté hoy aquí dirigiéndome a todos ustedes. A nivel más personal no puedo dejar de agradecer a mi familia, y en particular a mis padres, que me han dado la formación necesaria para que yo pueda estar hoy aquí dirigiéndome a ustedes. Desde Castilla les puedo asegurar que en mí encontrarán un amigo fiel, para toda la vida.

HE DICHO.