2 Herramientas y resultados avanzados

Ejercicio 2.1 (Comparar 2 ideales). Consideramos los dos ideales I y J de $\mathbb{Q}[x,y,z]$ siguientes:

$$\begin{array}{rcl} I & := & (x^2+z, xy+y^2+z, xz-y^3-2yz, y^4+3y^2z+z^2), \\ J & := & (x^2+z, xy+y^2+z, x^3-yz). \end{array}$$

Compara estos dos ideales, es decir determina cual de las siguientes afirmaciones es cierta (si es que alguna lo es): $I \subset J$, $J \subset I$, $I = J$.

Ejercicio 2.2 (Ideales monomiales).

1. Demuestra que un ideal monomial M de $K[x_1,\ldots,x_n]$ admite un único sistema minimal de generadores formado por monomios, $\mathcal{M}$, y que $\mathcal{M}$ es la base de Gröbner reducida de M respecto de cualquier orden monomial.
2. Proporciona una método eficiente para determinar si un ideal es o no monomial.
3. Determina cual de los 2 ideales de $\mathbb{Q}[x,y,z]$ siguientes es monomial:
   - $I = \langle x^5y^7z + x^6y^3z^4, x^6y^3z^3 + x^8yz^3, x^6y^8z^2 + x^4y^8z^4, x^7yz^2 \rangle$;
   - $J = \langle x^5y^7z + x^6y^3z^4, x^6y^3z^3 + x^6yz^5, x^6y^8z^2 + x^4y^8z^4, x^7yz^2 \rangle$.

Ejercicio 2.3 (Ideales bonomiales). Se dice que un ideal I de $K[x_1,\ldots,x_n]$ es *binomial* si admite un sistema de generadores formado por diferencias de monomios. Probar que, dado un órden monomial cualquiera, la base de Gröbner reducida de un ideal binomial es binomial.

Ejercicio 2.4 (Ecuaciones implícitas, un primer paso). Consideramos el siguiente conjunto $\mathcal{C}$ de punto de $\mathbb{Q}^3$:

$$\mathcal{C} := \{(t,t^2,t^3) \in \mathbb{Q}^3;\, t \in \mathbb{Q}\}.$$

Denotamos por $I := I(C)$ al ideal formado por todos los polinomios de $A := \mathbb{Q}[x,y,z]$ que se anulan en todos los puntos de C.

1. Justifica que $\langle y-x^2, z-x^3 \rangle \subset I$.
2. Prueba que todo polinomio $f \in \mathbb{Q}[x,y,z]$ se escribe de la forma

   $$f = h_1.(y-x^2) + h_2.(z-x^3) + r$$

   con $h_1, h_2 \in \mathbb{Q}[x,y,z]$ y $r \in \mathbb{Q}[x]$. Deduce que $I = \langle y-x^2, z-x^3 \rangle$.