VI Escuela Doctoral Intercontinental de Matemáticas PUCP-UVa 2013, 7-17 de mayo

INTRODUCCIÓN A LAS BASES DE GRÖBNER Y APLICACIONES

Philippe Gimenez

Ejercicios

1 Definiciones y propiedades básicas

Ejercicio 1.1 (Ordenes monomiales)**.** Ordena los monomios de los siguientes polinomios de mayor a menor para el orden lexicográfico (LEX), para el orden lexicográfico graduado (GLEX) y para el orden lexicográfico inverso graduado (GREVLEX):

1. $2xy^2 + 3x + 4y^2 \in K[x, y]$;
2. $x^2y^3z^3 - x^4y + y^3z^2 - xyz^2 \in K[x, y, z]$.

Ejercicio 1.2 (Algoritmo de división)**.** Fijamos sobre $\mathbb{Q}[x, y, z]$ el orden GREVLEX. Divide el polinomio $g = x^2y^3z^3 + x^4y + y^3z^2 + xyz^2 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ por la lista ordenada de polinomios $[f_1, f_2, f_3]$ con $f_1 = xy-z^2$, $f_2 = x^2-yz$, $f_3 = y^3-xz^2$. Repite el ejercicio con la lista $[f_3, f_1, f_2]$.

Ejercicio 1.3 (Orden producto)**.** Consideramos dos grupos de variables, $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_m\}$ y sea $A := K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$. Si $>_x$ es un orden monomial sobre $K[x_1, \dots, x_n]$ y $>_y$ un orden monomial sobre $K[y_1, \dots, y_m]$, definimos la siguiente relación entre monomios de A: dados $\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{x}^\beta$ dos monomios en las variables $\mathbf{x}$, y $\mathbf{y}^\gamma, \mathbf{y}^\delta$ dos monomios en las variables $\mathbf{y}$,

$$\mathbf{x}^\alpha\mathbf{y}^\gamma > \mathbf{x}^\beta\mathbf{y}^\delta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{x}^\alpha >_x \mathbf{x}^\beta \\ \text{o} \\ \mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}^\beta \text{ y } \mathbf{y}^\gamma >_y \mathbf{y}^\delta. \end{cases}$$

1. Prueba que $>$ es un orden monomial sobre A.
2. Justifica que si M es un monomio de A solo en las variables $\mathbf{y}$ y si N es un monomio de A donde aparece al menos una de las variables $\mathbf{x}$, entonces $N > M$.
3. Prueba que si los órdenes $>_x$ y $>_y$ son los órdenes lexicográficos sobre $K[x_1, \dots, x_n]$ y $K[y_1, \dots, y_m]$ respectivamente, entonces $>$ es el orden lexicográfico sobre A.
4. Observa como se puede generalizar la definición de **orden producto** anterior con más de dos grupos de variables.

Ejercicio 1.4 (Primeros pasos con bases de Gröbner)**.** Deduce del Ejercicio 1.2 que $\{f_1, f_2, f_3\}$ no es una base de Gröbner del ideal $I = \langle f_1, f_2, f_3\rangle$ para el orden GREVLEX.

Ejercicio 1.5 (Bis)**.** Demuestra (directamente usando la definición) que $\{x+z, y-z\} \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$ es una base de Gröbner del ideal I que generan para el orden LEX.