

Singularidades de campos de vectores reales: perfil topológico (II)

Clementa Alonso González
Universidad de Alicante

VI Escuela Doctoral de Matemáticas PUCP-UVA 2013

Pregunta 1

¿Podemos clasificar topológicamente las singularidades que no sean hiperbólicas?

Pregunta 2

¿Podemos encontrar un representante de cada clase de equivalencia que juegue, para las degeneradas, el papel de la parte lineal en el caso hiperbólico?

Pregunta 1

¿Podemos clasificar topológicamente las singularidades que no sean hiperbólicas?

Pregunta 2

¿Podemos encontrar un representante de cada clase de equivalencia que juegue, para las degeneradas, el papel de la parte lineal en el caso hiperbólico?

ξ analítico
0

k -jet

$j_k(\xi)$ k

Sea

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n + \dots$$

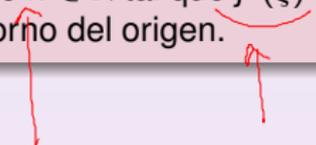
es el desarrollo en serie de Taylor de ξ en el origen, donde ξ_n representa la componente homogénea de grado n .

¿ $j_k(\xi)$ topológicamente equiv.
a ξ alrededor de 0?

DuMortier

Teorema

Sea ξ un campo de clase C^∞ en \mathbb{R}^2 con una singularidad en el origen. Si ξ tiene órbitas características, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $j^k(\xi)$ es topológicamente equivalente a ξ en un entorno del origen.



K

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo

Eemplo

$$\xi = (yx + x^3 + x^2y + x^4 + x^3y^2) \frac{\partial}{\partial x} + (-2y^2 + y^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Este campo está determinado por su 3-jet:

$$j^3(\xi) = (yx + x^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial x} + (-2y^2 + y^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Pero hay términos que son irrelevantes...

$$x^2y \frac{\partial}{\partial x} + y^3 \frac{\partial}{\partial y}$$

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo

Eemplo

$$\xi = (yx + x^3 + x^2y + x^4 + x^3y^2) \frac{\partial}{\partial x} + (-2y^2 + y^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Este campo está determinado por su 3-jet:

$$j^3(\xi) = (yx + x^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial x} + (-2y^2 + y^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Pero hay términos que son irrelevantes...

$$x^2y \frac{\partial}{\partial x} + y^3 \frac{\partial}{\partial y}$$

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo

Eemplo

$$\xi = (yx + x^3 + x^2y + x^4 + x^3y^2) \frac{\partial}{\partial x} + (-2y^2 + y^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Este campo está determinado por su 3-jet:

$$j^3(\xi) = (yx + x^3 + \cancel{x^2y}) \frac{\partial}{\partial x} + (-2y^2 + \cancel{y^3} + x^2y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Pero hay términos que son irrelevantes...

$$x^2y \frac{\partial}{\partial x} + y^3 \frac{\partial}{\partial y}$$

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo ¿cuáles?

Se usa el polígono de Newton para elegir los términos adecuados



Parte principal $P_N(\xi)$

Fijado el polígono, para una familia genérica de campos, la parte principal es un representante de la clase de equivalencia topológica de ξ .

Además, el polígono de Newton da el *morfismo de desingularización*.

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo ¿cuáles?

Se usa el polígono de Newton para elegir los términos adecuados



Parte principal $P_N(\xi)$

Fijado el polígono, para una familia genérica de campos, la parte principal es un representante de la clase de equivalencia topológica de ξ .

Además, el polígono de Newton da el *morfismo de desingularización*.

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo ¿cuáles?

Se usa el polígono de Newton para elegir los términos adecuados



Parte principal $P_{\mathcal{N}}(\xi)$

Fijado el polígono, para una familia genérica de campos, la parte principal es un representante de la clase de equivalencia topológica de ξ .

Además, el polígono de Newton da el *morfismo de desingularización*.

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo ¿cuáles?

Se usa el polígono de Newton para elegir los términos adecuados



Parte principal $P_{\mathcal{N}}(\xi)$

Fijado el polígono, para una familia genérica de campos, la parte principal es un representante de la clase de equivalencia topológica de ξ .

Además, el polígono de Newton da el *morfismo de desingularización*.

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo ¿cuáles?

Se usa el polígono de Newton para elegir los términos adecuados



Parte principal $P_{\mathcal{N}}(\xi)$

Fijado el polígono, para una familia genérica de campos, la parte principal es un representante de la clase de equivalencia topológica de ξ .

Además, el polígono de Newton da el *morfismo de desingularización*.

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo ¿cuáles?

Se usa el polígono de Newton para elegir los términos adecuados



Parte principal $P_{\mathcal{N}}(\xi)$

Fijado el polígono, para una familia genérica de campos, la parte principal es un representante de la clase de equivalencia topológica de ξ .

Además, el polígono de Newton da el *morfismo de desingularización*.

Consideremos un campo de vectores

$$\xi = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) y \frac{\partial}{\partial y}$$

Escribamos ξ como una suma finita

$$\xi = \sum_{ij} \xi_{ij}$$

donde

$$\xi_{ij} = a_{ij} x^{i+1} y^j \frac{\partial}{\partial x} + b_{ij} x^j y^{j+1} \frac{\partial}{\partial y} \quad a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Llamamos *soporte* del campo ξ al conjunto:

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \xi_{ij} \neq 0\}$$

Consideremos un campo de vectores

$$\xi = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) y \frac{\partial}{\partial y}$$

Escribamos ξ como una suma finita

$$\xi = \sum_{ij} \xi_{ij}$$

donde

$$\xi_{ij} = a_{ij} x^{i+1} y^j \frac{\partial}{\partial x} + b_{ij} x^i y^{j+1} \frac{\partial}{\partial y} \quad a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Llamamos *soporte* del campo ξ al conjunto:

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \xi_{ij} \neq 0\}$$

Consideremos un campo de vectores

$$\xi = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) y \frac{\partial}{\partial y}$$

Escribamos ξ como una suma finita

$$\xi = \sum_{ij} \xi_{ij}$$

donde

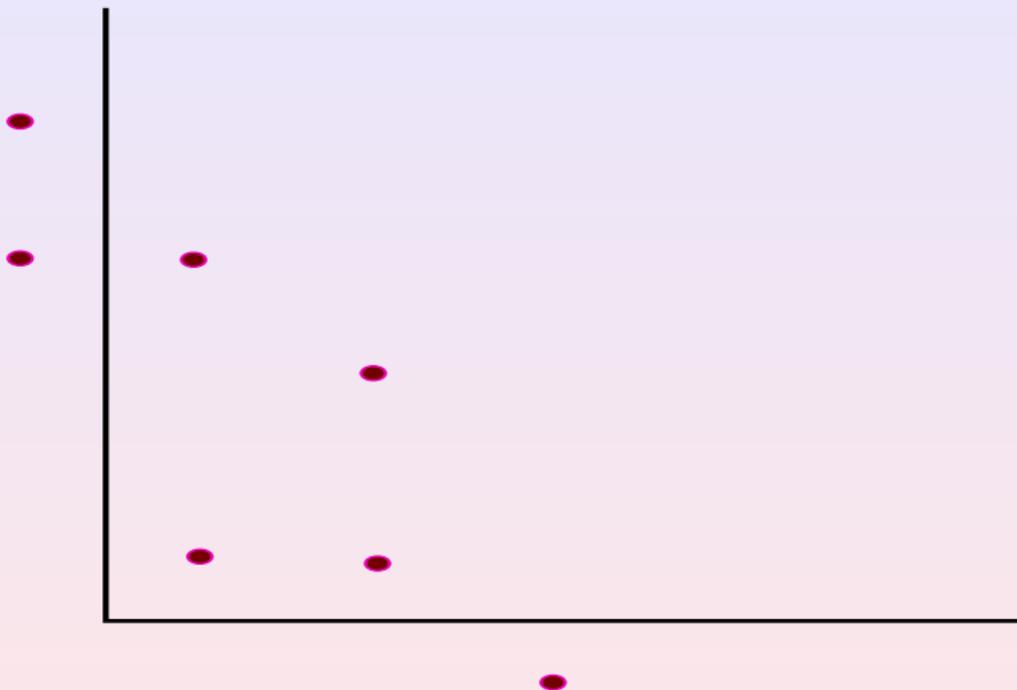
$$\xi_{ij} = a_{ij} x^{i+1} y^j \frac{\partial}{\partial x} + b_{ij} x^i y^{j+1} \frac{\partial}{\partial y} \quad a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Llamamos *soporte* del campo ξ al conjunto:

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \xi_{ij} \neq 0\}$$

$$a_{ij} \neq 0 \text{ ó } b_{ij} \neq 0$$

El polígono de Newton. Parte Principal

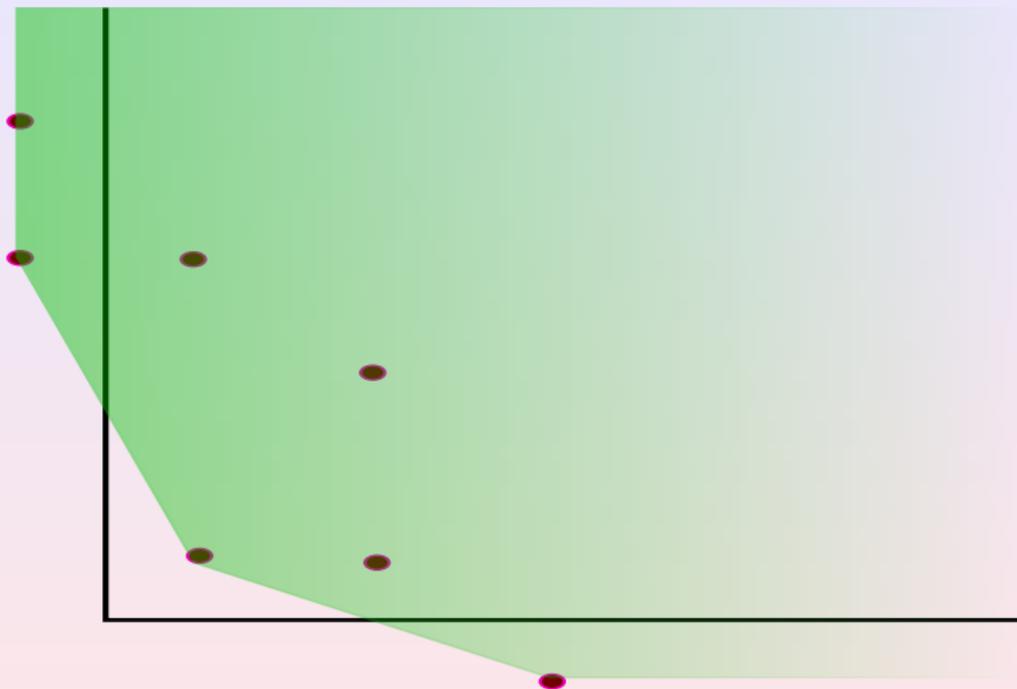


El *polígono de Newton* \mathcal{N} de ξ es el cierre convexo del conjunto

$$P = \bigcup_{k \in S} \{k + \mathbb{R}_{\geq 0}^2\}$$

donde $\mathbb{R}_{\geq 0}^2 = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

El polígono de Newton. Parte Principal



El *polígono de Newton* \mathcal{N} de ξ es el cierre convexo del conjunto

$$P = \bigcup_{k \in S} \{k + \mathbb{R}_{\geq 0}^2\}$$

donde $\mathbb{R}_{\geq 0}^2 = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

El *diagrama de Newton* Γ de ξ es la unión de las caras compactas η_j de la frontera del polígono de Newton.

La *parte principal* de ξ se define como el campo de vectores $P_{\mathcal{N}}(\xi) = \sum_k \xi_{\eta_k}$ con

$$\xi_{\eta_k} = \sum_{(i,j) \in \eta_k} \xi_{ij}.$$

El *polígono de Newton* \mathcal{N} de ξ es el cierre convexo del conjunto

$$P = \bigcup_{k \in S} \{k + \mathbb{R}_{\geq 0}^2\}$$

donde $\mathbb{R}_{\geq 0}^2 = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

El *diagrama de Newton* Γ de ξ es la unión de las caras compactas η_j de la frontera del polígono de Newton.

La *parte principal* de ξ se define como el campo de vectores $P_{\mathcal{N}}(\xi) = \sum_k \xi_{\eta_k}$ con

$$\xi_{\eta_k} = \sum_{(i,j) \in \eta_k} \xi_{ij}.$$

El *polígono de Newton* \mathcal{N} de ξ es el cierre convexo del conjunto

$$P = \bigcup_{k \in S} \{k + \mathbb{R}_{\geq 0}^2\}$$

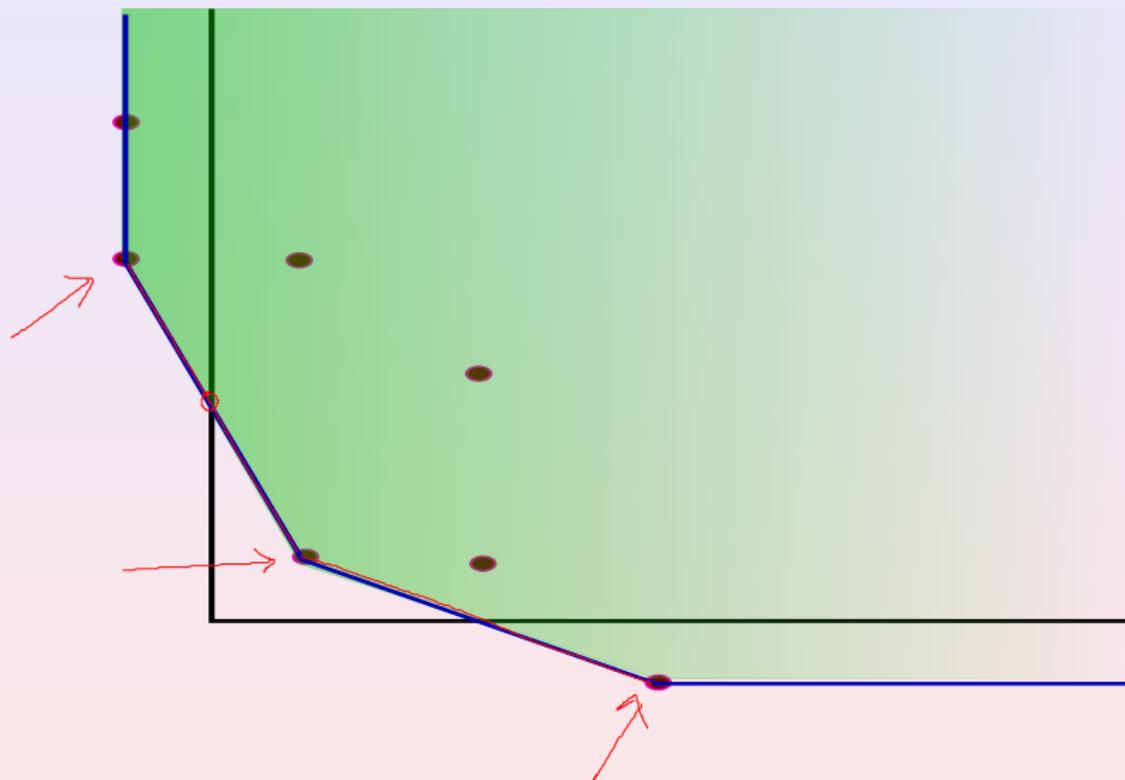
donde $\mathbb{R}_{\geq 0}^2 = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

El *diagrama de Newton* Γ de ξ es la unión de las caras compactas η_j de la frontera del polígono de Newton.

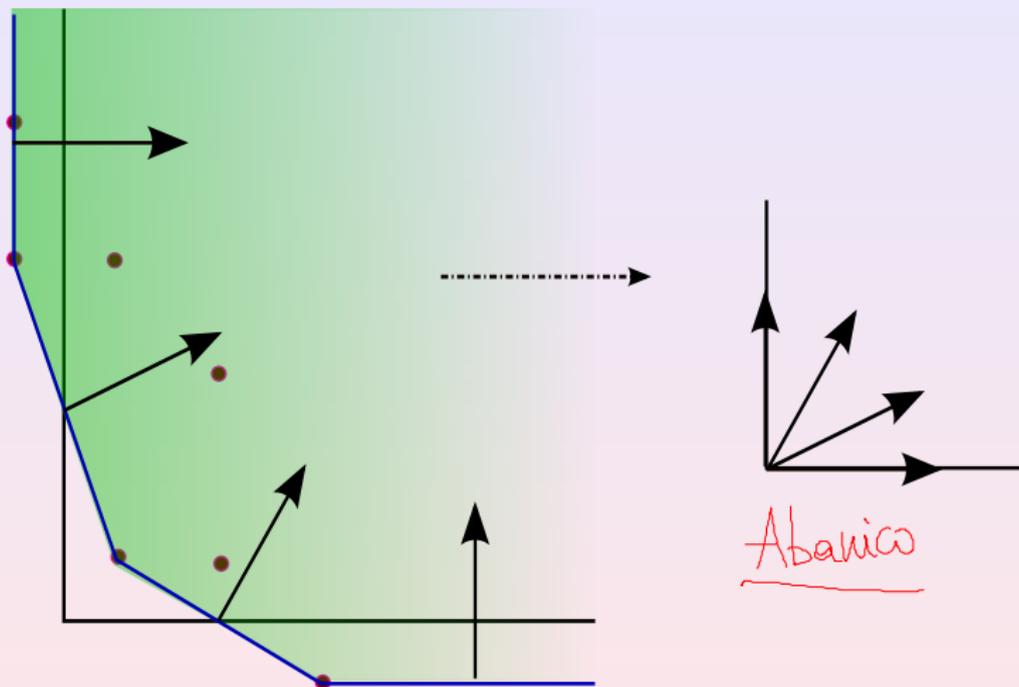
La *parte principal* de ξ se define como el campo de vectores $P_{\mathcal{N}}(\xi) = \sum_k \xi_{\eta_k}$ con

$$\xi_{\eta_k} = \sum_{(i,j) \in \eta_k} \xi_{ij}.$$

El polígono de Newton. Parte Principal



El polígono de Newton. Parte Principal



Los primeros objetos de la Geometría Tórica son los conos. La construcción de una variedad algebraica afín asociada a un cono σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sigue las siguientes etapas:

$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo σ

Cono dual de σ

El semigrupo aditivo S_σ asociado a σ

La variedad algebraica U_σ

Los primeros objetos de la Geometría Tórica son los conos. La construcción de una variedad algebraica afín asociada a un cono σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sigue las siguientes etapas:

$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo σ

Cono dual de σ

El semigrupo aditivo S_σ asociado a σ

La variedad algebraica U_σ

Los primeros objetos de la Geometría Tórica son los conos. La construcción de una variedad algebraica afín asociada a un cono σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sigue las siguientes etapas:

$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo σ

Cono dual de σ

El semigrupo aditivo S_σ asociado a σ

La variedad algebraica U_σ

Los primeros objetos de la Geometría Tórica son los conos. La construcción de una variedad algebraica afín asociada a un cono σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sigue las siguientes etapas:

$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo σ

Cono dual de σ

El semigrupo aditivo S_σ asociado a σ

La variedad algebraica U_σ

Los primeros objetos de la Geometría Tórica son los conos. La construcción de una variedad algebraica afín asociada a un cono σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sigue las siguientes etapas:

$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo σ

Cono dual de σ

El semigrupo aditivo S_σ asociado a σ

La variedad algebraica U_σ

Los primeros objetos de la Geometría Tórica son los conos. La construcción de una variedad algebraica afín asociada a un cono σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sigue las siguientes etapas:

$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo σ

Cono dual de σ

El semigrupo aditivo S_σ asociado a σ

La variedad algebraica U_σ

Los primeros objetos de la Geometría Tórica son los conos. La construcción de una variedad algebraica afín asociada a un cono σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sigue las siguientes etapas:

$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo σ

Cono dual de σ

El semigrupo aditivo S_σ asociado a σ

La variedad algebraica U_σ

$$\sigma = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \quad \sum \lambda_i \mathbb{R}_{\geq 0} + \dots + v_n \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo

Dado $A = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto finito de vectores de \mathbb{R}^n , el conjunto

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n; \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \lambda_i \geq 0\}$$

se llama un *cono poliédrico*. Los vectores v_1, \dots, v_r son los generadores del cono. Si $A = \emptyset$, entonces $\sigma = \{0\}$.

Un cono poliédrico será *racional*, si todos los generadores pertenecen a \mathbb{Z}^n . Diremos que es *fuertemente convexo* si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo

Dado $A = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto finito de vectores de \mathbb{R}^n , el conjunto

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n; \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \lambda_i \geq 0\}$$

se llama un *cono poliédrico*. Los vectores v_1, \dots, v_r son los generadores del cono. Si $A = \emptyset$, entonces $\sigma = \{0\}$.

Un cono poliédrico será *racional*, si todos los generadores pertenecen a \mathbb{Z}^n . Diremos que es *fuertemente convexo* si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo

Dado $A = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto finito de vectores de \mathbb{R}^n , el conjunto

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n; \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \lambda_i \geq 0\}$$

se llama un *cono poliédrico*. Los vectores v_1, \dots, v_r son los generadores del cono. Si $A = \emptyset$, entonces $\sigma = \{0\}$.

Un cono poliédrico será *racional*, si todos los generadores pertenecen a \mathbb{Z}^n .

Diremos que es *fuertemente convexo* si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo

Dado $A = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto finito de vectores de \mathbb{R}^n , el conjunto

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n; \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \lambda_i \geq 0\}$$

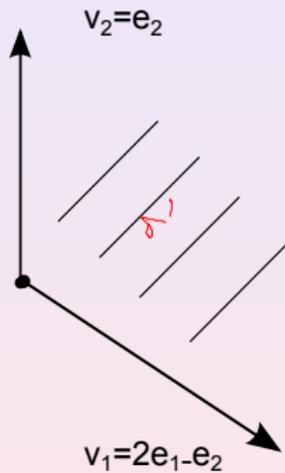
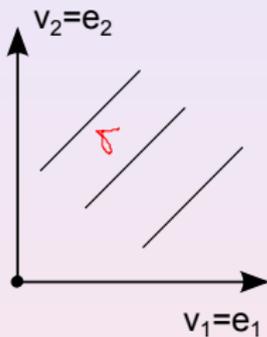
se llama un *cono poliédrico*. Los vectores v_1, \dots, v_r son los generadores del cono. Si $A = \emptyset$, entonces $\sigma = \{0\}$.

Un cono poliédrico será *racional*, si todos los generadores pertenecen a \mathbb{Z}^n . Diremos que es *fuertemente convexo* si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$

.



dim 0



Cono dual de un cono σ

Sea $(\mathbb{R}^n)^*$ el espacio dual de \mathbb{R}^n . Definimos $\check{\sigma}$ el *cono dual* de σ como

$$\check{\sigma} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : u(v) \geq 0 \forall v \in \sigma\}$$

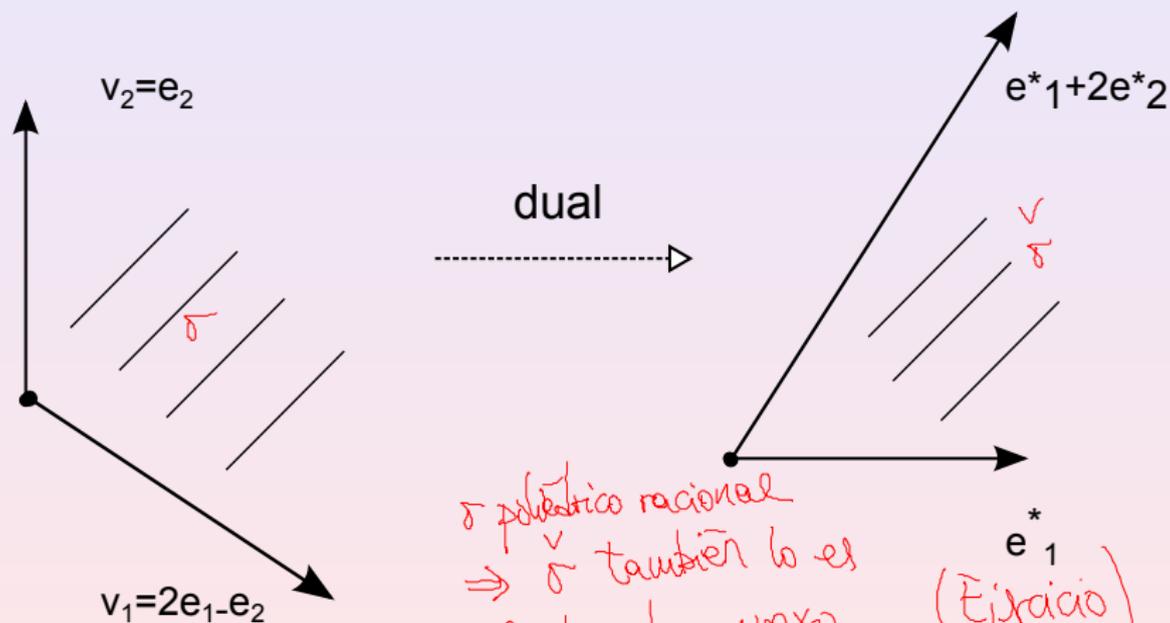
$$M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^n$$

$$\sigma = \{0\}$$



$$v \in \mathbb{R}^n$$
$$\sigma = \mathbb{R}^n$$





δ polinómico racional
 $\Rightarrow \checkmark$ también lo es
 δ fuertemente convexo
 $\Rightarrow \delta$ lo sea

(Ejercicio)

Caras de un cono σ

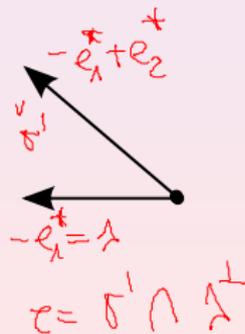
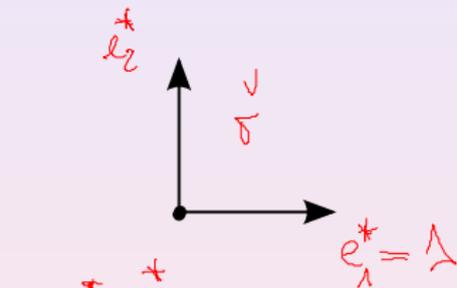
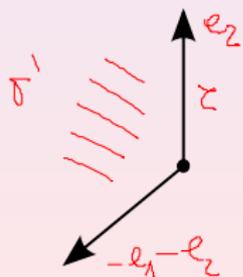
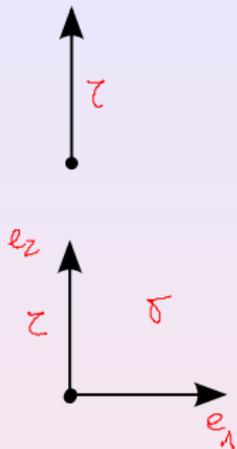
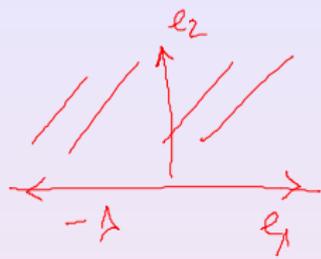
Dado σ un cono y $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$, entonces

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

será una cara de σ . Lo denotaremos por $\tau < \sigma$.

- Un cono es una cara de sí mismo
- Una cara de una cara es una cara
- Si $\tau < \sigma$ $\dim \tau = 1 \Rightarrow \tau$ arista.

Nociones básicas de geometría tórica



$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$$

$$\lambda \in \sigma^\vee \cap M$$

$\{e_1^*, e_2^*\}$
base de $(\mathbb{R}^2)^*$

Propiedad

Si $\tau < \sigma$ y $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ con $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$, entonces

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

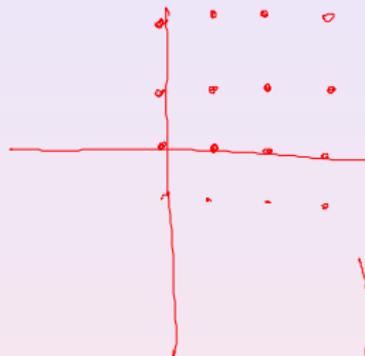
$$\begin{array}{l} \tau < \sigma \\ \tau \supset \sigma \end{array}$$

$$\begin{aligned} \check{\tau} &= \tau \\ \check{\left(\sigma + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda) \right)} &= \sigma \cap (-\lambda)^\perp \\ &= \sigma \cap \lambda^\perp \end{aligned}$$

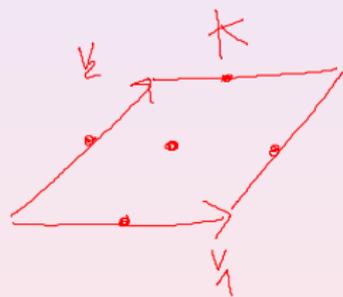
El semigrupo aditivo asociado a un cono σ

Denotaremos por S_σ al semigrupo $\sigma \cap M$ y lo llamaremos el *semigrupo asociado a σ* .

$$\tau = \{0\}$$



$$S_\sigma = \mathbb{Z}^2$$

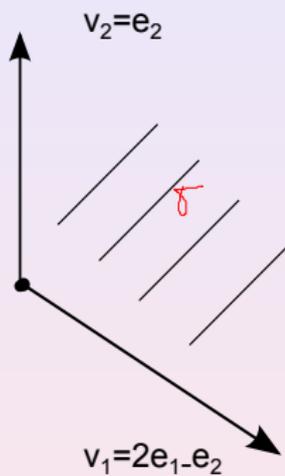


$$t_1 v_1 + t_2 v_2$$
$$0 \leq t_i \leq 1$$

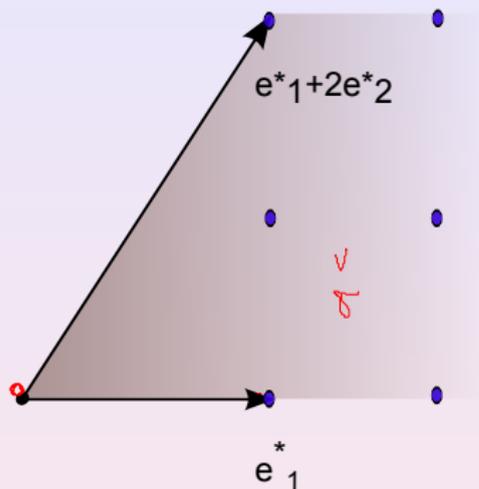
(Lema de Gordon)

Observación

Si σ es un cono poliédrico racional entonces $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ es un semigrupo aditivo finitamente generado.



semigrupo



Propiedad

Si $\tau < \sigma$ y $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ con $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$, entonces

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda)$$

Variedad algebraica asociada a un cono

σ poliédrico racional
fuertemente convexo.

$$S_{\sigma} = \check{\sigma} \cap M$$

↳ Finitamente generado

$\{m_1, \dots, m_p\}$ conjunto de generadores.

$$a_1 m_1 + \dots + a_p m_p = b_1 m_1 + \dots + b_p m_p \quad a_i, b_i \in \mathbb{Z} \geq 0$$

$$U_{\sigma} = \left\{ (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{C}^p \mid x_1^{a_1} \dots x_p^{a_p} - x_1^{b_1} \dots x_p^{b_p} = 0 \right\}$$

↓ variedad algebraica afín asociada a σ

$$\sigma = \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$v_1 = (a_1, b_1)$$

$$v_2 = (a_2, b_2)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \pm 1$$

$$S_\sigma = \langle v_1^*, v_2^* \rangle$$

↳ Base

$$U_\sigma = \mathbb{C}^2$$

σ no singulares.

Ejemplo 2

$$\sigma = \{0\}$$

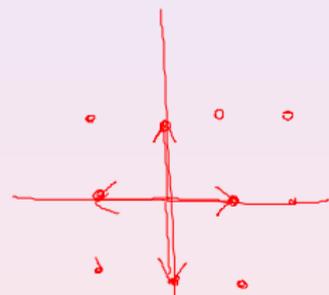
$$S_\sigma = \mathbb{Z}^2$$

$$S_\sigma = \left\langle \underset{\substack{v_1 \\ v_1^*}}{e_1^*}, \underset{\substack{v_2 \\ v_2^*}}{e_2^*}, \underset{v_3^*}{-e_1^*}, \underset{v_4^*}{-e_2^*} \right\rangle$$

$$v_1 + v_3 = 0$$

$$v_2 + v_4 = 0$$

$$U_\sigma = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid x_1 x_3 = 1, x_2 x_4 = 1\} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* = \mathbb{T}^2$$



Pregunta

Si $\tau < \sigma$, ¿Cuál es la relación entre las variedades algebraicas asociadas U_σ y U_τ ?

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda)$$

$$S_\sigma = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$$

$$S_\tau = \langle v_1, \dots, v_r, v_{r+1} \rangle$$

$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ \lambda & -\lambda \end{matrix}$

$$v_r + v_{r+1} = 0$$

$$U_\tau = \left\{ (x_1, \dots, x_{r+1}) \in \mathbb{C}^{r+1} / \mathbb{R}^5 \mid x_r x_{r+1} = 1 \right\}$$

$$\mathbb{C}^{r+1} \supset U_\tau \longrightarrow U_\sigma$$

$$(x_1, \dots, x_r, \frac{1}{x_r}) \longmapsto (x_1, \dots, x_r)$$

$$U_\tau \cong U_\sigma \setminus \{x_r = 0\}$$

Resumiendo:

Si $\tau < \sigma$ es una cara tal que

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

para $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$



$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$



$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$



$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

Resumiendo:

Si $\tau < \sigma$ es una cara tal que

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

para $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$

\Downarrow

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

Resumiendo:

Si $\tau < \sigma$ es una cara tal que

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

para $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$

\Downarrow

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

Resumiendo:

Si $\tau < \sigma$ es una cara tal que

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

para $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$

\Downarrow

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

Resumiendo:

Si $\tau < \sigma$ es una cara tal que

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

para $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$

\Downarrow

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

Resumiendo:

Si $\tau < \sigma$ es una cara tal que

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

para $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$

\Downarrow

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

Resumiendo:

Si $\tau < \sigma$ es una cara tal que

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

para $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$

\Downarrow

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

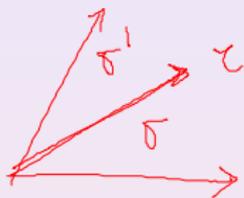
Si suponemos ahora que τ es la cara común de dos conos σ y σ' , según lo anterior podemos "pegar" U_σ y $U_{\sigma'}$ a lo largo de su parte común U_τ

$$U_\sigma \quad (x_1, \dots, x_r)$$

$$U_{\sigma'} \quad (v_1, \dots, v_p)$$

$$z < \sigma$$

$$z < \sigma'$$

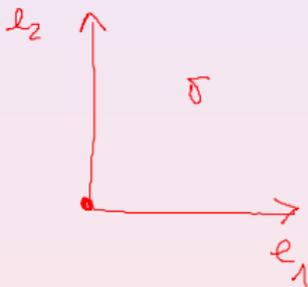
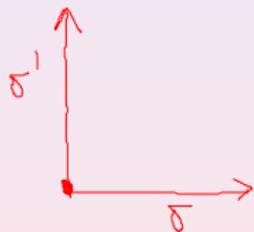


$$\psi_{\sigma, \sigma'} : U_\sigma \setminus \{x_r = 0\} \cong U_z \cong U_{\sigma'} \setminus \{v_p = 0\}$$

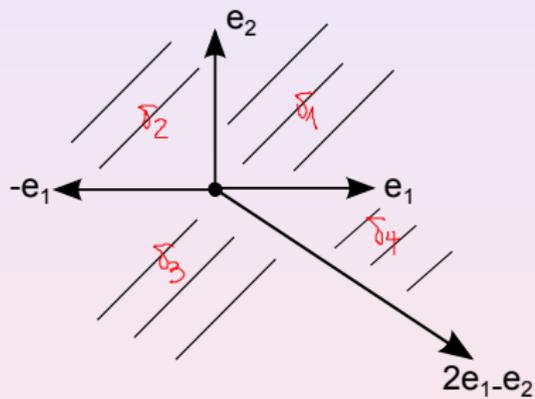
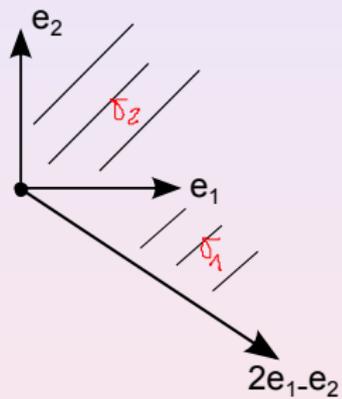
Abanico

Un abanico Δ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n es una unión finita de conos satisfaciendo las siguientes propiedades:

- 1 cada cono de Δ es un cono poliédrico racional fuertemente convexo,
- 2 cada cara de un cono de Δ es un cono de Δ ,
- 3 si σ y σ' son conos de Δ , entonces $\sigma \cap \sigma'$ es una cara común de ambos.



$$\Delta_{st}$$
$$\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle$$



Utilizando el proceso anterior, se puede construir una variedad tórica $T(\Delta)$ asociada al abanico Δ .

Definición de variedad tórica

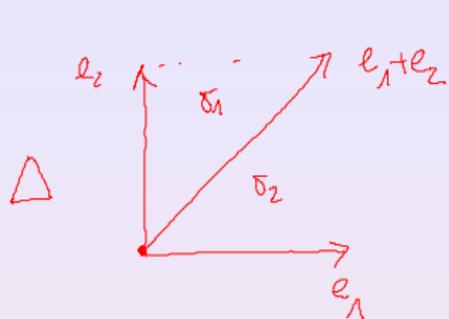
Sea Δ un abanico en \mathbb{R}^n . Consideremos la unión disjunta $\cup_{\sigma \in \Delta} U_{\sigma}$ donde dos puntos $x \in U_{\sigma}$ y $x' \in U_{\sigma'}$ están identificados si $\Psi_{\sigma, \sigma'}(x) = x'$. El espacio resultante se llama variedad tórica.

Utilizando el proceso anterior, se puede construir una variedad tórica $T(\Delta)$ asociada al abanico Δ .

Definición de variedad tórica

Sea Δ un abanico en \mathbb{R}^n . Consideremos la unión disjunta $\cup_{\sigma \in \Delta} U_{\sigma}$ donde dos puntos $x \in U_{\sigma}$ y $x' \in U_{\sigma'}$ están identificados si $\Psi_{\sigma, \sigma'}(x) = x'$. El espacio resultante se llama **variedad tórica**.

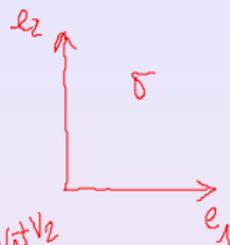
La explosión de \mathbb{R}^2 en el origen es una variedad tórica



$$\sigma_1 = \langle e_2, e_1 + e_2 \rangle$$

$$\sigma_2 = \langle e_1, e_1 + e_2 \rangle$$

$$\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle$$



$$U_\sigma \cong U_{\sigma_1} \cong U_{\sigma_2} \cong \mathbb{R}^2$$

$$S_{\sigma_1} = \langle e_1^*, e_2^*, e_2^* - e_1^* \rangle$$

$$S_{\sigma_2} = \langle e_1^*, e_2^*, e_1^* - e_2^* \rangle$$

$$\mathbb{R}^3 \supset U_{\sigma_1} = \{ (x', y', t') \mid x't' = y' \}$$

$$U_{\sigma_1} \xrightarrow{\pi_1} U_\sigma$$

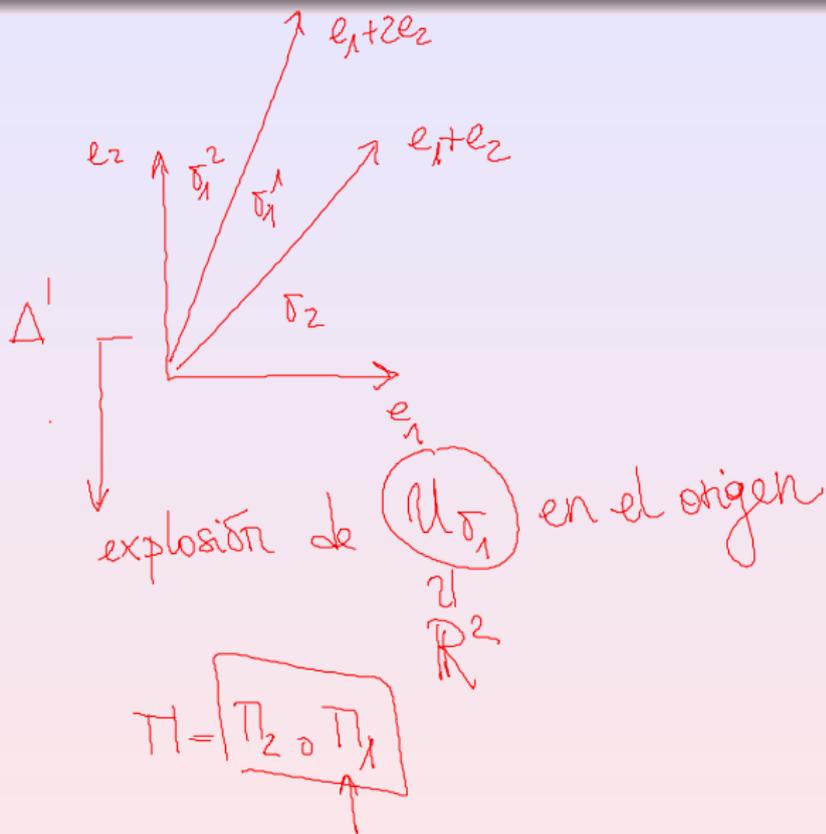
$$(x', x't', t') \mapsto (x', x't')$$

$$T(\Delta) = U_{\sigma_1} \cup U_{\sigma_2}$$

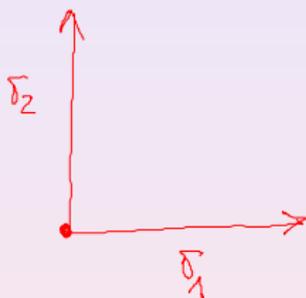
Ejercicio

$$\pi_1(U_{\sigma_1}) \text{ w/out } \mathbb{R}^2 \setminus \{x'=0\} \cup \{(0,0)\}$$

La explosión de \mathbb{R}^2 en el origen es una variedad tórica



- 1 Determina la variedad tórica que le corresponde al abanico:



$$\sigma_1 = \langle e_1 \rangle$$

$$\sigma_2 = \langle e_2 \rangle$$

Singularidades de campos de vectores reales: perfil topológico (II)

Clementa Alonso González
Universidad de Alicante

VI Escuela Doctoral de Matemáticas PUCP-UVA 2013