

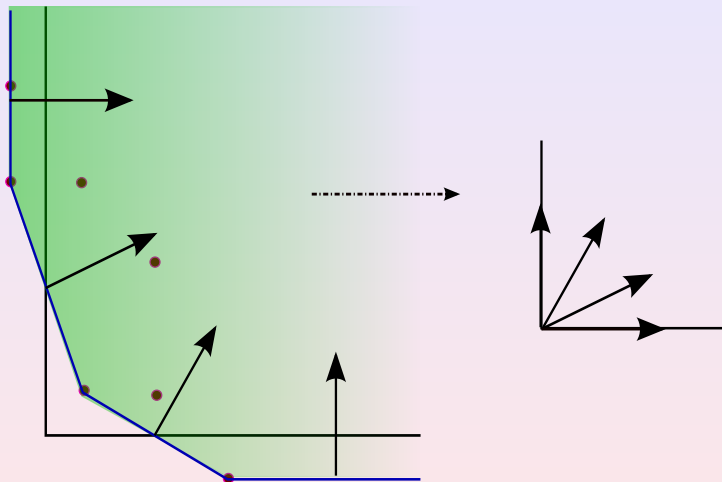
# Singularidades de campos de vectores reales: perfil topológico (III)

Clementa Alonso González  
Universidad de Alicante

VI Escuela Doctoral de Matemáticas PUCP-UVA 2013



# El abanico asociado a un campo $\xi$



## Refinamiento

Un abanico  $\Delta'$  *refina* otro dado  $\Delta$  si para cada  $\sigma' \in \Delta'$  existe  $\sigma \in \Delta$  tal que  $\sigma' \subset \sigma$ . Se denota  $\Delta' > \Delta$ .

Se define de forma natural un *morfismo tórico* entre variedades tóricas

$$T(\Delta') \rightarrow T(\Delta)$$

## Refinamiento

Un abanico  $\Delta'$  *refina* otro dado  $\Delta$  si para cada  $\sigma' \in \Delta'$  existe  $\sigma \in \Delta$  tal que  $\sigma' \subset \sigma$ . Se denota  $\Delta' > \Delta$ .

Se define de forma natural un *morfismo tórico* entre variedades tóricas

$$T(\Delta') \rightarrow T(\Delta)$$

## Refinamiento

Un abanico  $\Delta'$  *refina* otro dado  $\Delta$  si para cada  $\sigma' \in \Delta'$  existe  $\sigma \in \Delta$  tal que  $\sigma' \subset \sigma$ . Se denota  $\Delta' > \Delta$ .

Se define de forma natural un *morfismo tórico* entre variedades tóricas

$$T(\Delta') \rightarrow T(\Delta)$$

## Subdivision

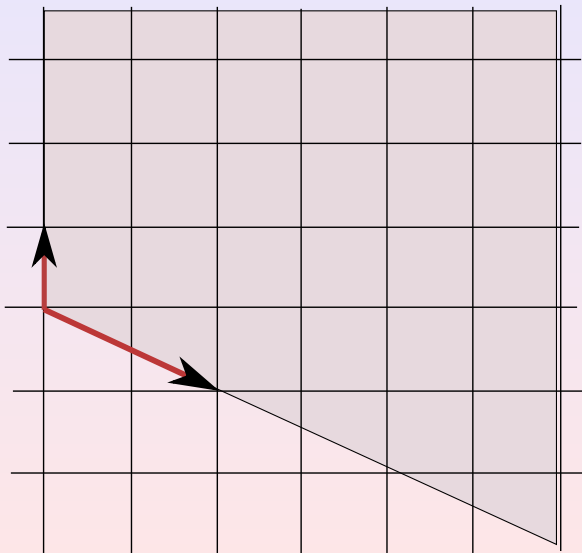
$\Delta'$  es una *subdivisión* de  $\Delta$ , y lo denotaremos por  $\Delta' \gg \Delta$ , si cada  $\sigma \in \Delta$  es la unión de varios conos  $\sigma' \in \Delta'$ .

### Pregunta:

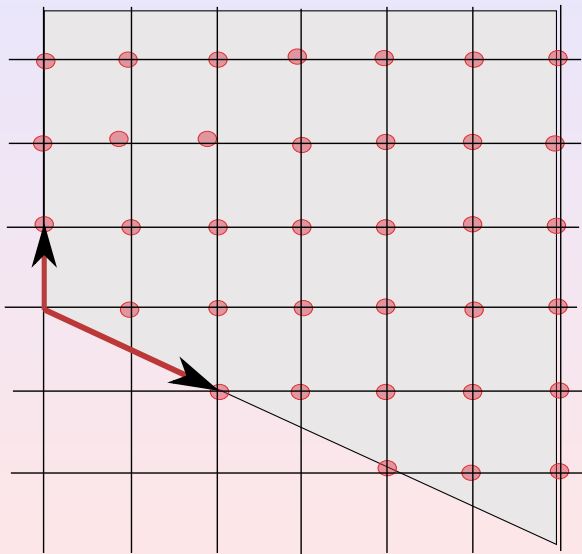
Si partimos de un abanico singular  $\Delta$  en  $\mathbb{R}^2$  ¿Se puede encontrar uno no singular  $\Delta'$  tal que  $\Delta' \gg \Delta$ ?



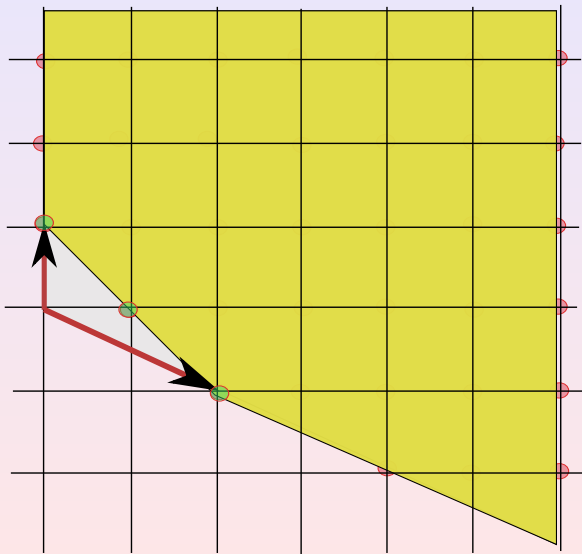
# Refinamientos y subdivisiones:



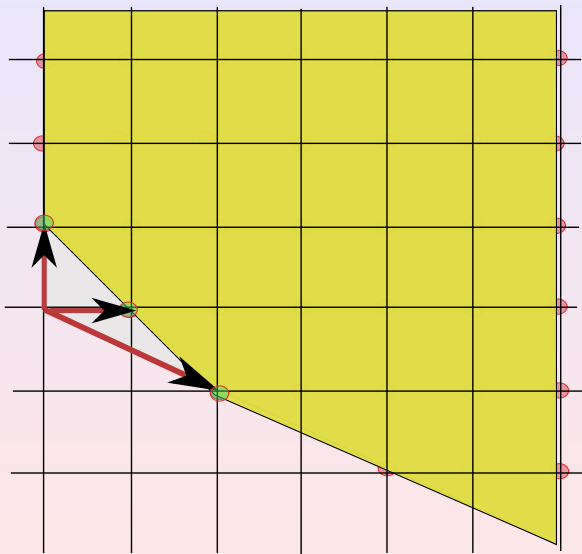
# Refinamientos y subdivisiones:



# Refinamientos y subdivisiones:



# Refinamientos y subdivisiones:



## Consecuencia

Si partimos de un abanico singular  $\Delta$  en  $\mathbb{R}^2$ , repitiendo este proceso para cada cono, obtenemos un abanico no singular  $\Delta'$ , con el mínimo número de conos, tal que  $\Delta' \gg \Delta$ .

### Pregunta

Dado un abanico no singular  $\Delta' \gg \Delta_{st}$ , ¿se puede obtener  $T(\Delta')$  tras una sucesión de explosiones de  $\mathbb{R}^2 = T(\Delta_{st})$ ?

## Refinamientos y subdivisiones:

Se puede obtener una secuencia:

$$\Delta' = \Delta_k \gg \dots \gg \Delta_1 \gg \Delta_0 = \Delta_{st}$$

Cada morfismo  $T(\Delta_j) \rightarrow T(\Delta_{j-1})$  es una explosión en el origen de alguna de las cartas algebraicas afines que recubren  $T(\Delta_{j-1})$ .

Esto nos proporciona un morfismo tórico

$$\tau : T(\Delta') \rightarrow T(\Delta_{st}) = \mathbb{R}^2$$

que es una secuencia de explosiones centradas en el origen.

## Refinamientos y subdivisiones:

Se puede obtener una secuencia:

$$\Delta' = \Delta_k \gg \dots \gg \Delta_1 \gg \Delta_0 = \Delta_{st}$$

Cada morfismo  $T(\Delta_j) \rightarrow T(\Delta_{j-1})$  es una explosión en el origen de alguna de las cartas algebraicas afines que recubren  $T(\Delta_{j-1})$ .

Esto nos proporciona un morfismo tórico

$$\tau : T(\Delta') \rightarrow T(\Delta_{st}) = \mathbb{R}^2$$

que es una secuencia de explosiones centradas en el origen.



Se puede obtener una secuencia:

$$\Delta' = \Delta_k \gg \dots \gg \Delta_1 \gg \Delta_0 = \Delta_{st}$$

Cada morfismo  $T(\Delta_j) \rightarrow T(\Delta_{j-1})$  es una explosión en el origen de alguna de las cartas algebraicas afines que recubren  $T(\Delta_{j-1})$ .

Esto nos proporciona un morfismo tórico

$$\tau : T(\Delta') \rightarrow T(\Delta_{st}) = \mathbb{R}^2$$

que es una secuencia de explosiones centradas en el origen.

- 1 Consideremos  $\mathcal{N}$  el polígono de Newton.
- 2 Para cada cara  $\eta_j$  del diagrama de Newton  $\Gamma$ , consideramos un vector  $(\alpha_j, \beta_j)$  normal a la misma, de manera que  $\alpha_j, \beta_j$  sean primos entre sí.
- 3 Consideramos el abanico  $\Delta_{\mathcal{N}} \subset \mathbb{R}^2$  determinado por la familia de vectores  $\{(\alpha_j, \beta_j)\}$ .
- 4 Si  $\Delta_{\mathcal{N}}$  es no singular, consideramos  $\Delta' \gg \Delta_{\mathcal{N}}$  la subdivisión mínima no singular.
- 5 Consideramos el morfismo tórico (que es una sucesión de explosiones con centro en un punto)  $\tau_{\mathcal{N}} : T(\Delta') \rightarrow T(\Delta_{st}) = \mathbb{R}^2$ .

- 1 Consideremos  $\mathcal{N}$  el polígono de Newton.
- 2 Para cada cara  $\eta_j$  del diagrama de Newton  $\Gamma$ , consideramos un vector  $(\alpha_j, \beta_j)$  normal a la misma, de manera que  $\alpha_j, \beta_j$  sean primos entre sí.
- 3 Consideramos el abanico  $\Delta_{\mathcal{N}} \subset \mathbb{R}^2$  determinado por la familia de vectores  $\{(\alpha_j, \beta_j)\}$ .
- 4 Si  $\Delta_{\mathcal{N}}$  es no singular, consideramos  $\Delta' \gg \Delta_{\mathcal{N}}$  la subdivisión mínima no singular.
- 5 Consideramos el morfismo tórico (que es una sucesión de explosiones con centro en un punto)  $\tau_{\mathcal{N}} : T(\Delta') \rightarrow T(\Delta_{st}) = \mathbb{R}^2$ .

- 1 Consideremos  $\mathcal{N}$  el polígono de Newton.
- 2 Para cada cara  $\eta_j$  del diagrama de Newton  $\Gamma$ , consideramos un vector  $(\alpha_j, \beta_j)$  normal a la misma, de manera que  $\alpha_j, \beta_j$  sean primos entre sí.
- 3 Consideramos el abanico  $\Delta_{\mathcal{N}} \subset \mathbb{R}^2$  determinado por la familia de vectores  $\{(\alpha_j, \beta_j)\}$ .
- 4 Si  $\Delta_{\mathcal{N}}$  es no singular, consideramos  $\Delta' \gg \Delta_{\mathcal{N}}$  la subdivisión mínima no singular.
- 5 Consideramos el morfismo tórico (que es una sucesión de explosiones con centro en un punto)  $\tau_{\mathcal{N}} : T(\Delta') \rightarrow T(\Delta_{st}) = \mathbb{R}^2$ .

- 1 Consideremos  $\mathcal{N}$  el polígono de Newton.
- 2 Para cada cara  $\eta_j$  del diagrama de Newton  $\Gamma$ , consideramos un vector  $(\alpha_j, \beta_j)$  normal a la misma, de manera que  $\alpha_j, \beta_j$  sean primos entre sí.
- 3 Consideramos el abanico  $\Delta_{\mathcal{N}} \subset \mathbb{R}^2$  determinado por la familia de vectores  $\{(\alpha_j, \beta_j)\}$ .
- 4 Si  $\Delta_{\mathcal{N}}$  es no singular, consideramos  $\Delta' \gg \Delta_{\mathcal{N}}$  la subdivisión mínima no singular.
- 5 Consideramos el morfismo tórico (que es una sucesión de explosiones con centro en un punto)  $\tau_{\mathcal{N}} : T(\Delta') \rightarrow T(\Delta_{st}) = \mathbb{R}^2$ .

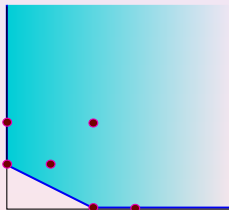
- 1 Consideremos  $\mathcal{N}$  el polígono de Newton.
- 2 Para cada cara  $\eta_j$  del diagrama de Newton  $\Gamma$ , consideramos un vector  $(\alpha_j, \beta_j)$  normal a la misma, de manera que  $\alpha_j, \beta_j$  sean primos entre sí.
- 3 Consideramos el abanico  $\Delta_{\mathcal{N}} \subset \mathbb{R}^2$  determinado por la familia de vectores  $\{(\alpha_j, \beta_j)\}$ .
- 4 Si  $\Delta_{\mathcal{N}}$  es no singular, consideramos  $\Delta' \gg \Delta_{\mathcal{N}}$  la subdivisión mínima no singular.
- 5 Consideramos el morfismo tórico (que es una sucesión de explosiones con centro en un punto)  $\tau_{\mathcal{N}} : T(\Delta') \rightarrow T(\Delta_{st}) = \mathbb{R}^2$ .

# Un ejemplo:

- 1 Consideremos el campo

$$\xi = (y + x^2 + xy + x^3 + x^2y^2)x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - 2y + y^2)y \frac{\partial}{\partial y}$$

- 2 Dibujamos su polígono de Newton:



- 3 Consideramos los vectores normales a las caras del diagrama de Newton:

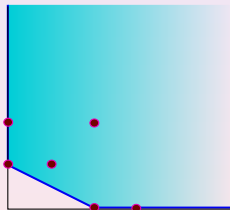
$$\{(0, 1), (1, 2), (1, 0)\}$$

# Un ejemplo:

- 1 Consideremos el campo

$$\xi = (y + x^2 + xy + x^3 + x^2y^2)x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - 2y + y^2)y \frac{\partial}{\partial y}$$

- 2 Dibujamos su polígono de Newton:



- 3 Consideramos los vectores normales a las caras del diagrama de Newton:

$$\{(0, 1), (1, 2), (1, 0)\}$$

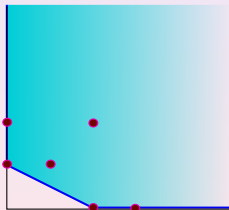


# Un ejemplo:

- 1 Consideremos el campo

$$\xi = (y + x^2 + xy + x^3 + x^2y^2)x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - 2y + y^2)y \frac{\partial}{\partial y}$$

- 2 Dibujamos su polígono de Newton:



- 3 Consideramos los vectores normales a las caras del diagrama de Newton:

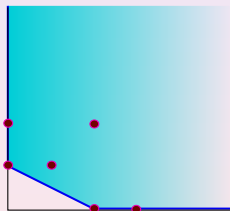
$$\{(0, 1), (1, 2), (1, 0)\}$$

# Un ejemplo:

- 1 Consideremos el campo

$$\xi = (y + x^2 + xy + x^3 + x^2y^2)x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - 2y + y^2)y \frac{\partial}{\partial y}$$

- 2 Dibujamos su polígono de Newton:



- 3 Consideramos los vectores normales a las caras del diagrama de Newton:

$$\{(0, 1), (1, 2), (1, 0)\}$$

- 1 Consideramos el abanico  $\Delta_{\mathcal{N}} \subset \mathbb{R}^2$  determinado por  $\{(0, 1), (1, 2), (1, 0)\}$ . ¿Es singular?
- 2  $\Delta_{\mathcal{N}}$  es singular :-)
- 3 Consideramos  $\Delta' \gg \Delta_{\mathcal{N}}$  la subdivisión mínima no singular. En este caso  $\Delta'$  está dado por...
- 4 El morfismo tórico  $\tau_{\mathcal{N}} : T(\Delta') \rightarrow T(\Delta_{st}) = \mathbb{R}^2$  consiste en...

1 Consideramos el abanico  $\Delta_{\mathcal{N}} \subset \mathbb{R}^2$  determinado por  $\{(0, 1), (1, 2), (1, 0)\}$ . ¿Es singular?

2  $\Delta_{\mathcal{N}}$  es singular :-)

3 Consideramos  $\Delta' \gg \Delta_{\mathcal{N}}$  la subdivisión mínima no singular. En este caso  $\Delta'$  está dado por...

4 El morfismo tórico  $\tau_{\mathcal{N}} : T(\Delta') \rightarrow T(\Delta_{st}) = \mathbb{R}^2$  consiste en...

- 1 Consideramos el abanico  $\Delta_{\mathcal{N}} \subset \mathbb{R}^2$  determinado por  $\{(0, 1), (1, 2), (1, 0)\}$ . ¿Es singular?
- 2  $\Delta_{\mathcal{N}}$  es singular :-)
- 3 Consideramos  $\Delta' \gg \Delta_{\mathcal{N}}$  la subdivisión mínima no singular. En este caso  $\Delta'$  está dado por...
- 4 El morfismo tórico  $\tau_{\mathcal{N}} : T(\Delta') \rightarrow T(\Delta_{st}) = \mathbb{R}^2$  consiste en...

- 1 Consideramos el abanico  $\Delta_{\mathcal{N}} \subset \mathbb{R}^2$  determinado por  $\{(0, 1), (1, 2), (1, 0)\}$ . ¿Es singular?
- 2  $\Delta_{\mathcal{N}}$  es singular :-)
- 3 Consideramos  $\Delta' \gg \Delta_{\mathcal{N}}$  la subdivisión mínima no singular. En este caso  $\Delta'$  está dado por...
- 4 El morfismo tórico  $\tau_{\mathcal{N}} : T(\Delta') \rightarrow T(\Delta_{st}) = \mathbb{R}^2$  consiste en...

## Teorema de Brunella-Miari

Sea  $\xi$  un campo de vectores analítico en  $\mathbb{R}^2$ . Supongamos que  $\xi$  tiene una singularidad en el origen y que su parte principal  $P(\xi)$  es no degenerada. Entonces  $\xi$  y  $P(\xi)$  son topológicamente equivalentes en un entorno del origen módulo centro-foco.

Fijado el polígono  $\mathcal{N}$ :

*La parte principal  $P_{\mathcal{N}}(\xi)$  es no degenerada si admite una desingularización hiperbólica de tipo tórico en el punto singular.*

Eso significa esencialmente dos cosas:

- 1 Sólo se realizan explosiones con centro en los orígenes de las cartas
- 2 Las singularidades finales son simples hiperbólicas.

Observación

Estas condiciones son genéricas



Fijado el polígono  $\mathcal{N}$ :

*La parte principal  $P_{\mathcal{N}}(\xi)$  es no degenerada si admite una desingularización hiperbólica de tipo tórico en el punto singular.*

Eso significa esencialmente dos cosas:

- 1 Sólo se realizan explosiones con centro en los orígenes de las cartas
- 2 Las singularidades finales son simples hiperbólicas.

Observación

Estas condiciones son genéricas

Fijado el polígono  $\mathcal{N}$ :

*La parte principal  $P_{\mathcal{N}}(\xi)$  es no degenerada si admite una desingularización hiperbólica de tipo tórico en el punto singular.*

Eso significa esencialmente dos cosas:

- 1 Sólo se realizan explosiones con centro en los orígenes de las cartas
- 2 Las singularidades finales son simples hiperbólicas.

Observación

Estas condiciones son genéricas

Fijado el polígono  $\mathcal{N}$ :

*La parte principal  $P_{\mathcal{N}}(\xi)$  es no degenerada si admite una desingularización hiperbólica de tipo tórico en el punto singular.*

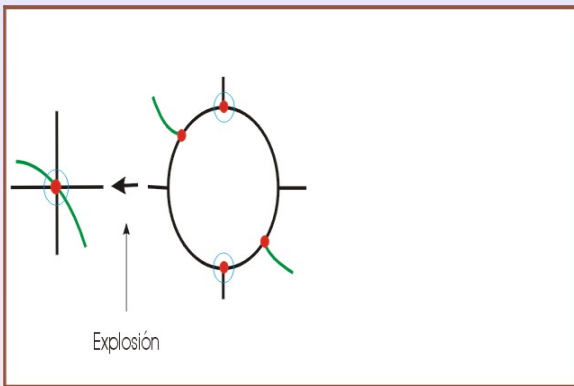
Eso significa esencialmente dos cosas:

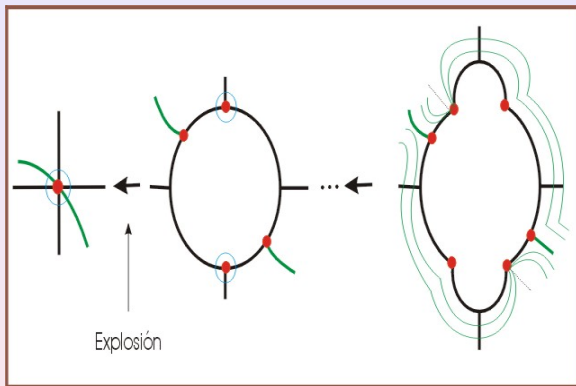
- 1 Sólo se realizan explosiones con centro en los orígenes de las cartas
- 2 Las singularidades finales son simples hiperbólicas.

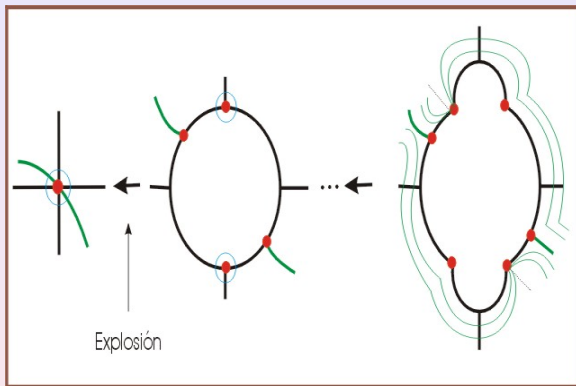
## Observación

Estas condiciones son genéricas









1) Si  $P_{\mathcal{N}}(\xi)$  es no degenerada, el morfismo  $\tau_{\mathcal{N}}$  es un morfismo de desingularización para  $\xi$ .

Supongamos que

$$\xi = A(x, y)x \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y)y \frac{\partial}{\partial y}$$

Usaremos el valor

$$\nu = \nu(\xi) = \min\{\text{ord}(A), \text{ord}(B)\}$$

y procederemos por inducción sobre ese valor.



1) Si  $P_{\mathcal{N}}(\xi)$  es no degenerada, el morfismo  $\tau_{\mathcal{N}}$  es un morfismo de desingularización para  $\xi$ .

Supongamos que

$$\xi = A(x, y)x \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y)y \frac{\partial}{\partial y}$$

Usaremos el valor

$$\nu = \nu(\xi) = \min\{\text{ord}(A), \text{ord}(B)\}$$

y procederemos por inducción sobre ese valor.

1) Si  $P_{\mathcal{N}}(\xi)$  es no degenerada, el morfismo  $\tau_{\mathcal{N}}$  es un morfismo de desingularización para  $\xi$ .

Supongamos que

$$\xi = A(x, y)x \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y)y \frac{\partial}{\partial y}$$

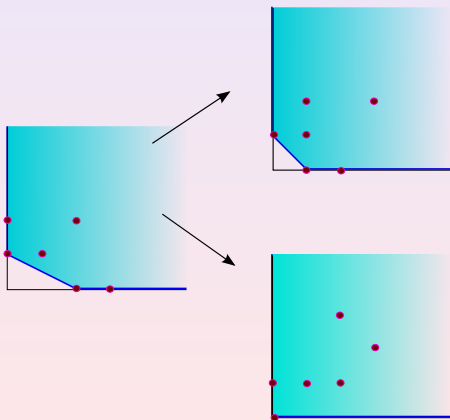
Usaremos el valor

$$\nu = \nu(\xi) = \min\{\text{ord}(A), \text{ord}(B)\}$$

y procederemos por inducción sobre ese valor.

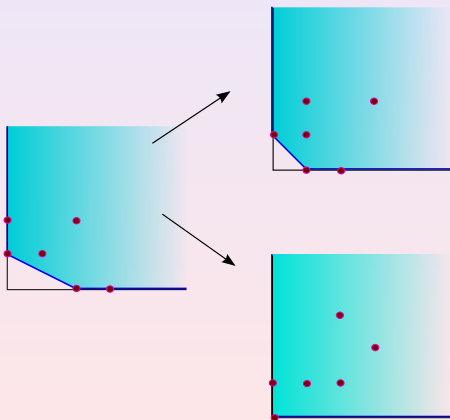
# Ejemplo:

$$\xi = (y + x^2 + xy + x^3 + x^2y^2)x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - 2y + y^2)y \frac{\partial}{\partial y}$$



# Ejemplo:

$$\xi = (y + x^2 + xy + x^3 + x^2y^2)x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - 2y + y^2)y \frac{\partial}{\partial y}$$



# Idea de la demostración:

## 2) Construcción de la equivalencia

# Idea de la demostración:

- 1 Determina las posibles partes principales para un campo de vectores con singularidad aislada en el origen y con parte lineal nilpotente.
- 2 Describe los posibles mapas de fase para los vectores cuya parte principal sea de la forma:

$$y \frac{\partial}{\partial x} + ax^k \frac{\partial}{\partial y}$$



# Singularidades de campos de vectores reales: perfil topológico (III)

Clementa Alonso González  
Universidad de Alicante

VI Escuela Doctoral de Matemáticas PUCP-UVA 2013