

Singularidades de campos de vectores reales: perfil topológico (II)

Clementa Alonso González
Universidad de Alicante

VI Escuela Doctoral de Matemáticas PUCP-UVA 2013

Pregunta 1

¿Podemos clasificar topológicamente las singularidades que no sean hiperbólicas?

Pregunta 2

¿Podemos encontrar un representante de cada clase de equivalencia que juegue, para las degeneradas, el papel de la parte lineal en el caso hiperbólico?

Pregunta 1

¿Podemos clasificar topológicamente las singularidades que no sean hiperbólicas?

Pregunta 2

¿Podemos encontrar un representante de cada clase de equivalencia que juegue, para las degeneradas, el papel de la parte lineal en el caso hiperbólico?

Sea

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n + \dots$$

es el desarrollo en serie de Taylor de ξ en el origen, donde ξ_n representa la componente homogénea de grado n .

Teorema

Sea ξ un campo de clase C^∞ en \mathbb{R}^2 con una singularidad en el origen. Si ξ tiene órbitas características, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $j^k(\xi)$ es topológicamente equivalente a ξ en un entorno del origen.

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo

Eemplo

$$\xi = (yx + x^3 + x^2y + x^4 + x^3y^2) \frac{\partial}{\partial x} + (-2y^2 + y^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Este campo está determinado por su 3-jet:

$$j^3(\xi) = (yx + x^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial x} + (-2y^2 + y^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Pero hay términos que son irrelevantes...

$$x^2y \frac{\partial}{\partial x} + y^3 \frac{\partial}{\partial y}$$

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo

Eemplo

$$\xi = (yx + x^3 + x^2y + x^4 + x^3y^2) \frac{\partial}{\partial x} + (-2y^2 + y^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Este campo está determinado por su 3-jet:

$$j^3(\xi) = (yx + x^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial x} + (-2y^2 + y^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Pero hay términos que son irrelevantes...

$$x^2y \frac{\partial}{\partial x} + y^3 \frac{\partial}{\partial y}$$

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo

Eemplo

$$\xi = (yx + x^3 + x^2y + x^4 + x^3y^2) \frac{\partial}{\partial x} + (-2y^2 + y^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Este campo está determinado por su 3-jet:

$$j^3(\xi) = (yx + x^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial x} + (-2y^2 + y^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Pero hay términos que son irrelevantes...

$$x^2y \frac{\partial}{\partial x} + y^3 \frac{\partial}{\partial y}$$

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo ¿cuáles?

Se usa el polígono de Newton para elegir los términos adecuados



Parte principal $P_N(\xi)$

Fijado el polígono, para una familia genérica de campos, la parte principal es un representante de la clase de equivalencia topológica de ξ .

Además, el polígono de Newton da el *morfismo de desingularización*.

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo ¿cuáles?

Se usa el polígono de Newton para elegir los términos adecuados



Parte principal $P_N(\xi)$

Fijado el polígono, para una familia genérica de campos, la parte principal es un representante de la clase de equivalencia topológica de ξ .

Además, el polígono de Newton da el *morfismo de desingularización*.

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo ¿cuáles?

Se usa el polígono de Newton para elegir los términos adecuados



Parte principal $P_N(\xi)$

Fijado el polígono, para una familia genérica de campos, la parte principal es un representante de la clase de equivalencia topológica de ξ .

Además, el polígono de Newton da el *morfismo de desingularización*.

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo ¿cuáles?

Se usa el polígono de Newton para elegir los términos adecuados



Parte principal $P_{\mathcal{N}}(\xi)$

Fijado el polígono, para una familia genérica de campos, la parte principal es un representante de la clase de equivalencia topológica de ξ .

Además, el polígono de Newton da el *morfismo de desingularización*.

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo ¿cuáles?

Se usa el polígono de Newton para elegir los términos adecuados



Parte principal $P_{\mathcal{N}}(\xi)$

Fijado el polígono, para una familia genérica de campos, la parte principal es un representante de la clase de equivalencia topológica de ξ .

Además, el polígono de Newton da el *morfismo de desingularización*.

Brunella-Miari

Términos de distinto peso son relevantes para determinar el tipo topológico del campo ¿cuáles?

Se usa el polígono de Newton para elegir los términos adecuados



Parte principal $P_{\mathcal{N}}(\xi)$

Fijado el polígono, para una familia genérica de campos, la parte principal es un representante de la clase de equivalencia topológica de ξ .

Además, el polígono de Newton da el *morfismo de desingularización*.

Consideremos un campo de vectores

$$\xi = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) y \frac{\partial}{\partial y}$$

Escribamos ξ como una suma finita

$$\xi = \sum_{ij} \xi_{ij}$$

donde

$$\xi_{ij} = a_{ij} x^{i+1} y^j \frac{\partial}{\partial x} + b_{ij} x^j y^{j+1} \frac{\partial}{\partial y} \quad a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Llamamos *soporte* del campo ξ al conjunto:

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \xi_{ij} \neq 0\}$$

Consideremos un campo de vectores

$$\xi = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) y \frac{\partial}{\partial y}$$

Escribamos ξ como una suma finita

$$\xi = \sum_{ij} \xi_{ij}$$

donde

$$\xi_{ij} = a_{ij} x^{i+1} y^j \frac{\partial}{\partial x} + b_{ij} x^i y^{j+1} \frac{\partial}{\partial y} \quad a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Llamamos *soporte* del campo ξ al conjunto:

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \xi_{ij} \neq 0\}$$

Consideremos un campo de vectores

$$\xi = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) y \frac{\partial}{\partial y}$$

Escribamos ξ como una suma finita

$$\xi = \sum_{ij} \xi_{ij}$$

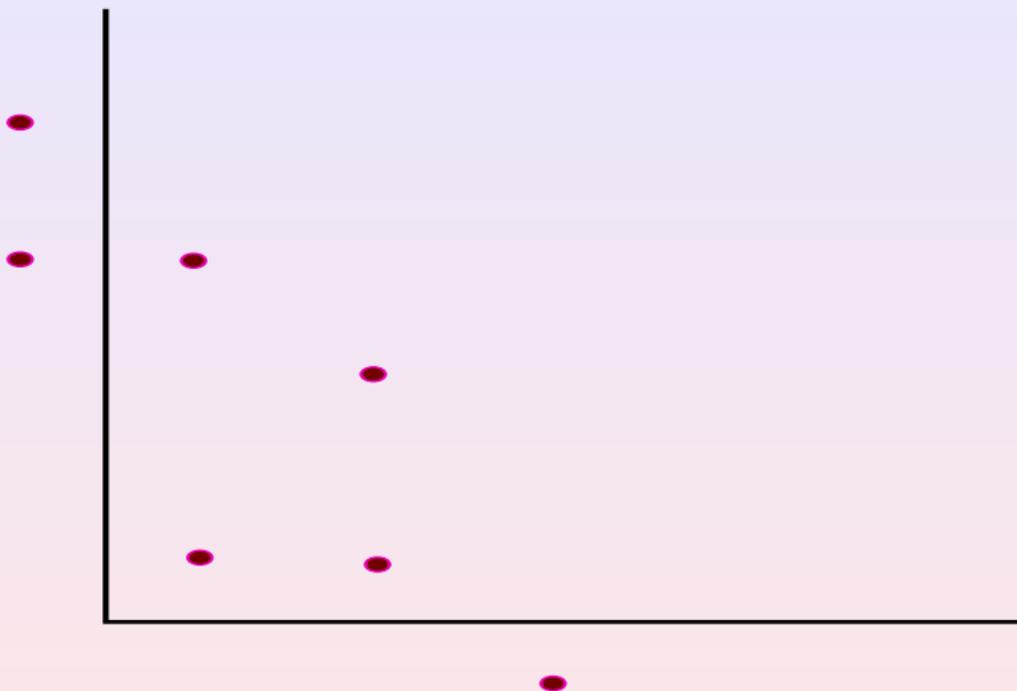
donde

$$\xi_{ij} = a_{ij} x^{i+1} y^j \frac{\partial}{\partial x} + b_{ij} x^i y^{j+1} \frac{\partial}{\partial y} \quad a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Llamamos *soporte* del campo ξ al conjunto:

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \xi_{ij} \neq 0\}$$

El polígono de Newton. Parte Principal

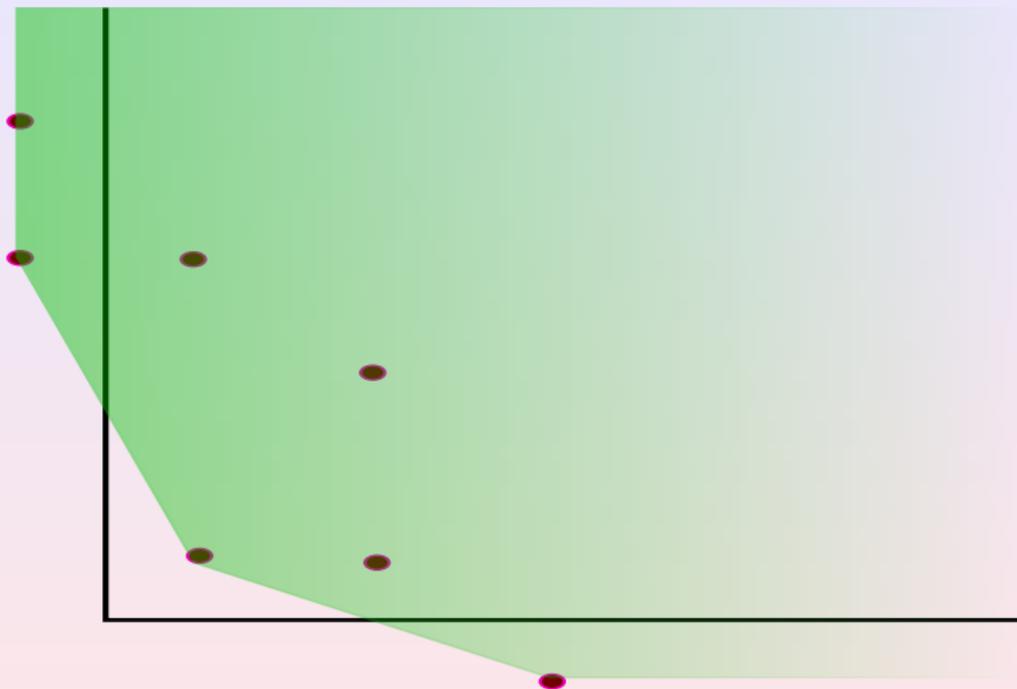


El *polígono de Newton* \mathcal{N} de ξ es el cierre convexo del conjunto

$$P = \bigcup_{k \in S} \{k + \mathbb{R}_{\geq 0}^2\}$$

donde $\mathbb{R}_{\geq 0}^2 = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

El polígono de Newton. Parte Principal



El *polígono de Newton* \mathcal{N} de ξ es el cierre convexo del conjunto

$$P = \bigcup_{k \in S} \{k + \mathbb{R}_{\geq 0}^2\}$$

donde $\mathbb{R}_{\geq 0}^2 = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

El *diagrama de Newton* Γ de ξ es la unión de las caras compactas η_j de la frontera del polígono de Newton.

La *parte principal* de ξ se define como el campo de vectores $P_{\mathcal{N}}(\xi) = \sum_k \xi_{\eta_k}$ con

$$\xi_{\eta_k} = \sum_{(i,j) \in \eta_k} \xi_{ij}.$$

El *polígono de Newton* \mathcal{N} de ξ es el cierre convexo del conjunto

$$P = \bigcup_{k \in S} \{k + \mathbb{R}_{\geq 0}^2\}$$

donde $\mathbb{R}_{\geq 0}^2 = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

El *diagrama de Newton* Γ de ξ es la unión de las caras compactas η_j de la frontera del polígono de Newton.

La *parte principal* de ξ se define como el campo de vectores $P_{\mathcal{N}}(\xi) = \sum_k \xi_{\eta_k}$ con

$$\xi_{\eta_k} = \sum_{(i,j) \in \eta_k} \xi_{ij}.$$

El *polígono de Newton* \mathcal{N} de ξ es el cierre convexo del conjunto

$$P = \bigcup_{k \in S} \{k + \mathbb{R}_{\geq 0}^2\}$$

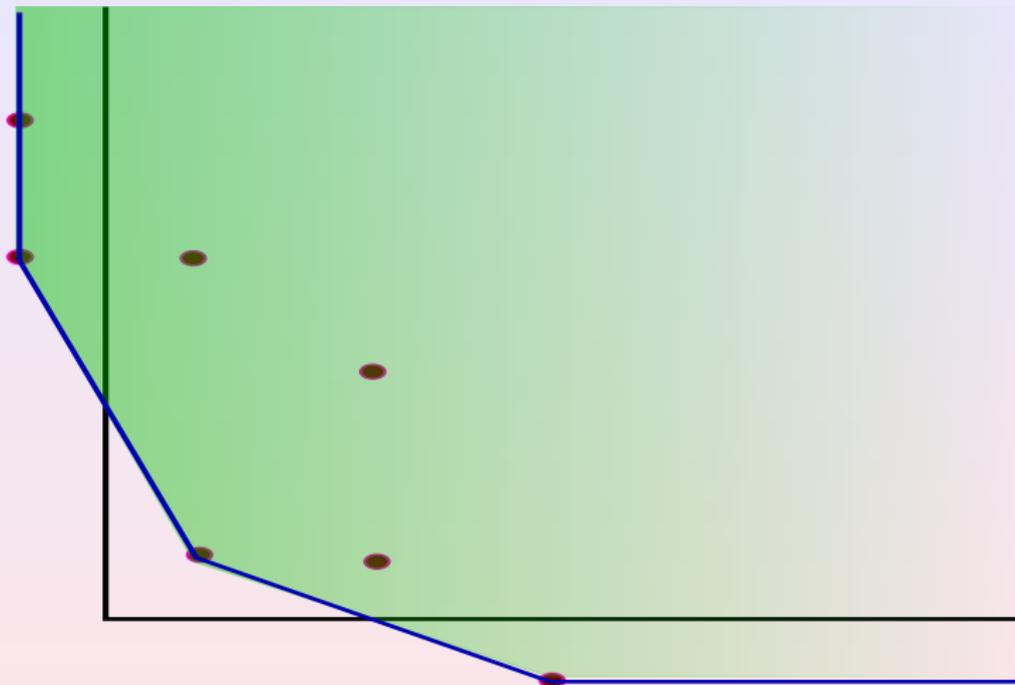
donde $\mathbb{R}_{\geq 0}^2 = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

El *diagrama de Newton* Γ de ξ es la unión de las caras compactas η_j de la frontera del polígono de Newton.

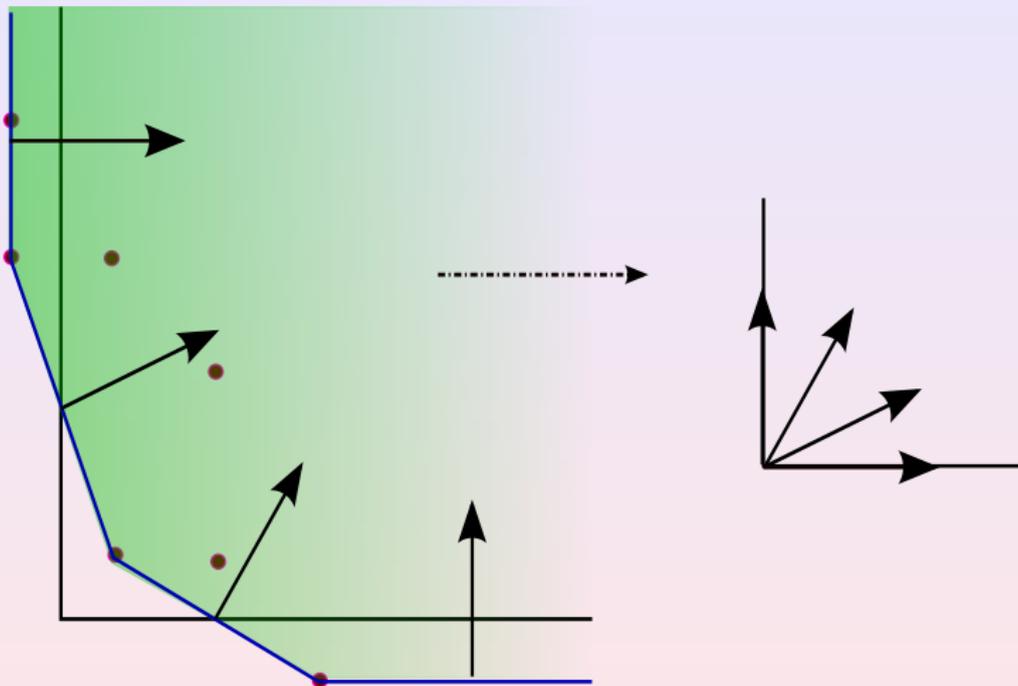
La *parte principal* de ξ se define como el campo de vectores $P_{\mathcal{N}}(\xi) = \sum_k \xi_{\eta_k}$ con

$$\xi_{\eta_k} = \sum_{(i,j) \in \eta_k} \xi_{ij}.$$

El polígono de Newton. Parte Principal



El polígono de Newton. Parte Principal



Los primeros objetos de la Geometría Tórica son los conos. La construcción de una variedad algebraica afín asociada a un cono σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sigue las siguientes etapas:

$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo σ

Cono dual de σ

El semigrupo aditivo S_σ asociado a σ

La variedad algebraica U_σ

Los primeros objetos de la Geometría Tórica son los conos. La construcción de una variedad algebraica afín asociada a un cono σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sigue las siguientes etapas:

$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo σ

Cono dual de σ

El semigrupo aditivo S_σ asociado a σ

La variedad algebraica U_σ

Los primeros objetos de la Geometría Tórica son los conos. La construcción de una variedad algebraica afín asociada a un cono σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sigue las siguientes etapas:

$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo σ

Cono dual de σ

El semigrupo aditivo S_σ asociado a σ

La variedad algebraica U_σ

Los primeros objetos de la Geometría Tórica son los conos. La construcción de una variedad algebraica afín asociada a un cono σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sigue las siguientes etapas:

$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo σ

Cono dual de σ

El semigrupo aditivo S_σ asociado a σ

La variedad algebraica U_σ

Los primeros objetos de la Geometría Tórica son los conos. La construcción de una variedad algebraica afín asociada a un cono σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sigue las siguientes etapas:

$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo σ

Cono dual de σ

El semigrupo aditivo S_σ asociado a σ

La variedad algebraica U_σ

Los primeros objetos de la Geometría Tórica son los conos. La construcción de una variedad algebraica afín asociada a un cono σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sigue las siguientes etapas:

$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo σ

Cono dual de σ

El semigrupo aditivo S_σ asociado a σ

La variedad algebraica U_σ

Los primeros objetos de la Geometría Tórica son los conos. La construcción de una variedad algebraica afín asociada a un cono σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sigue las siguientes etapas:

$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo σ

Cono dual de σ

El semigrupo aditivo S_σ asociado a σ

La variedad algebraica U_σ

Cono poliédrico racional fuertemente convexo

Dado $A = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto finito de vectores de \mathbb{R}^n , el conjunto

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n; \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \lambda_i \geq 0\}$$

se llama un *cono poliédrico*. Los vectores v_1, \dots, v_r son los generadores del cono. Si $A = \emptyset$, entonces $\sigma = \{0\}$.

Un cono poliédrico será *racional*, si todos los generadores pertenecen a \mathbb{Z}^n . Diremos que es *fuertemente convexo* si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo

Dado $A = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto finito de vectores de \mathbb{R}^n , el conjunto

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n; \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \lambda_i \geq 0\}$$

se llama un *cono poliédrico*. Los vectores v_1, \dots, v_r son los generadores del cono. Si $A = \emptyset$, entonces $\sigma = \{0\}$.

Un cono poliédrico será *racional*, si todos los generadores pertenecen a \mathbb{Z}^n . Diremos que es *fuertemente convexo* si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$

Cono poliédrico racional fuertemente convexo

Dado $A = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto finito de vectores de \mathbb{R}^n , el conjunto

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n; \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \lambda_i \geq 0\}$$

se llama un *cono poliédrico*. Los vectores v_1, \dots, v_r son los generadores del cono. Si $A = \emptyset$, entonces $\sigma = \{0\}$.

Un cono poliédrico será *racional*, si todos los generadores pertenecen a \mathbb{Z}^n .

Diremos que es *fuertemente convexo* si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$

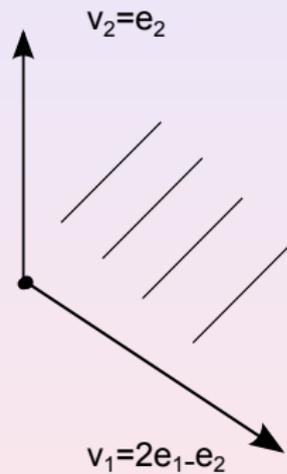
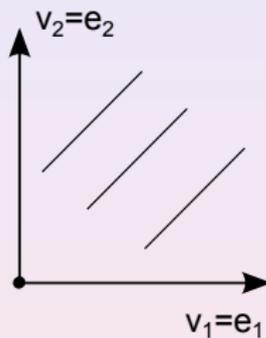
Cono poliédrico racional fuertemente convexo

Dado $A = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto finito de vectores de \mathbb{R}^n , el conjunto

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n; \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \lambda_i \geq 0\}$$

se llama un *cono poliédrico*. Los vectores v_1, \dots, v_r son los generadores del cono. Si $A = \emptyset$, entonces $\sigma = \{0\}$.

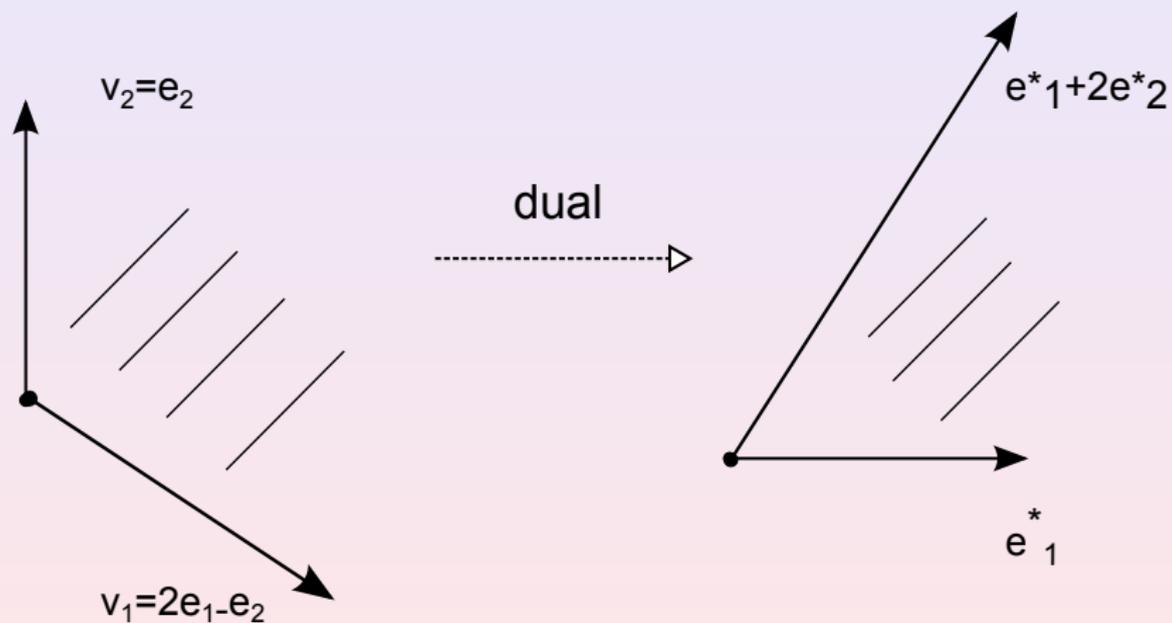
Un cono poliédrico será *racional*, si todos los generadores pertenecen a \mathbb{Z}^n . Diremos que es *fuertemente convexo* si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$



Cono dual de un cono σ

Sea $(\mathbb{R}^n)^*$ el espacio dual de \mathbb{R}^n . Definimos $\check{\sigma}$ el *cono dual* de σ como

$$\check{\sigma} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : u(v) \geq 0 \forall v \in \sigma\}$$

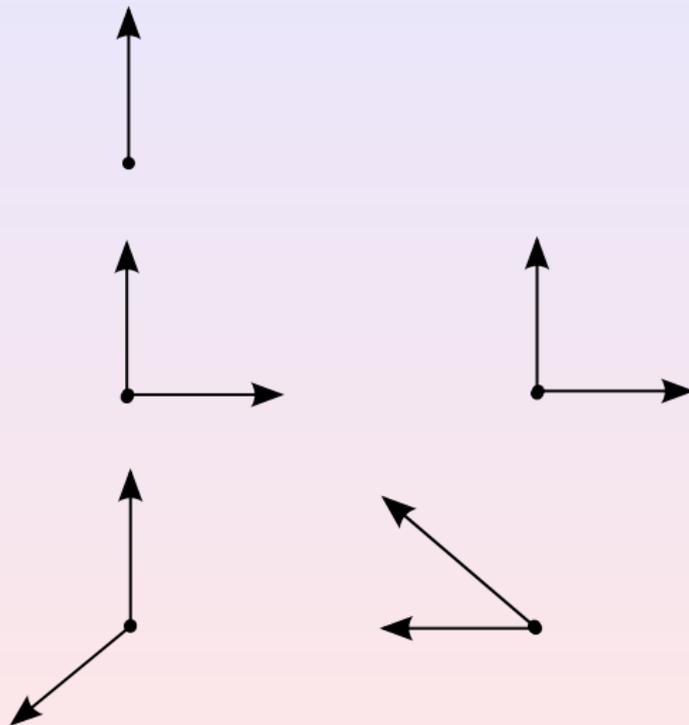


Caras de un cono σ

Dado σ un cono y $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$, entonces

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

será una *cara* de σ . Lo denotaremos por $\tau < \sigma$.



Propiedad

Si $\tau < \sigma$ y $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ con $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$, entonces

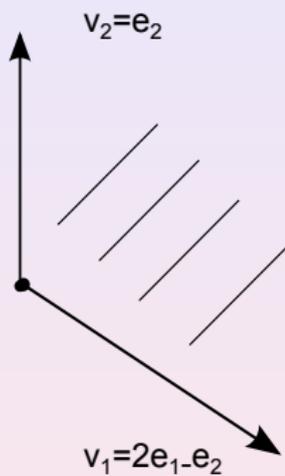
$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

El semigrupo aditivo asociado a un cono σ

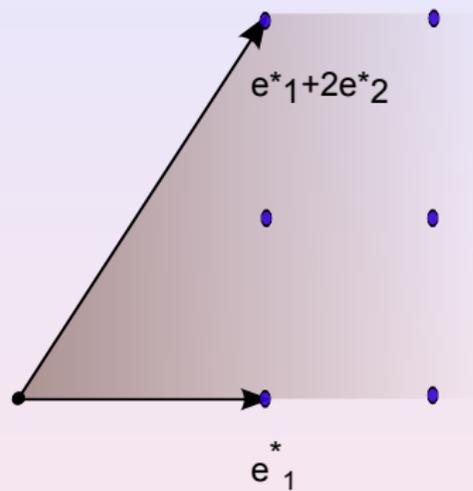
Denotaremos por S_σ al semigrupo $\check{\sigma} \cap M$ y lo llamaremos el *semigrupo asociado a σ* .

Observación

Si σ es un cono poliédrico racional entonces $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ es un semigrupo aditivo finitamente generado.



semigrupo
----->



Propiedad

Si $\tau < \sigma$ y $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ con $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$, entonces

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

Variedad algebraica asociada a un cono

Pregunta

Si $\tau < \sigma$, ¿Cuál es la relación entre las variedades algebraicas asociadas U_σ y U_τ ?

Resumiendo:

Si $\tau < \sigma$ es una cara tal que

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

para $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$



$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$



$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$



$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

Resumiendo:

Si $\tau < \sigma$ es una cara tal que

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

para $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$

\Downarrow

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

Resumiendo:

Si $\tau < \sigma$ es una cara tal que

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

para $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$

\Downarrow

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

Resumiendo:

Si $\tau < \sigma$ es una cara tal que

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

para $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$

\Downarrow

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

Resumiendo:

Si $\tau < \sigma$ es una cara tal que

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

para $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$

\Downarrow

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

Resumiendo:

Si $\tau < \sigma$ es una cara tal que

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

para $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$

\Downarrow

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

Resumiendo:

Si $\tau < \sigma$ es una cara tal que

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

para $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$

\Downarrow

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

\Downarrow

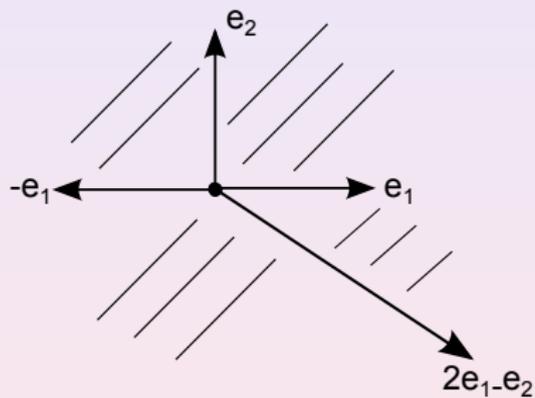
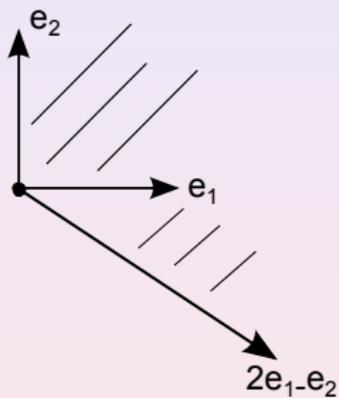
$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

Si suponemos ahora que τ es la cara común de dos conos σ y σ' , según lo anterior podemos “pegar” U_σ y $U_{\sigma'}$ a lo largo de su parte común U_τ

Abanico

Un abanico Δ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n es una unión finita de conos satisfaciendo las siguientes propiedades:

- 1 cada cono de Δ es un cono poliédrico racional fuertemente convexo,
- 2 cada cara de un cono de Δ es un cono de Δ ,
- 3 si σ y σ' son conos de Δ , entonces $\sigma \cap \sigma'$ es una cara común de ambos.



Utilizando el proceso anterior, se puede construir una variedad tórica $T(\Delta)$ asociada al abanico Δ .

Definición de variedad tórica

Sea Δ un abanico en \mathbb{R}^n . Consideremos la unión disjunta $\cup_{\sigma \in \Delta} U_{\sigma}$ donde dos puntos $x \in U_{\sigma}$ y $x' \in U_{\sigma'}$ están identificados si $\Psi_{\sigma, \sigma'}(x) = x'$. El espacio resultante se llama variedad tórica.

Utilizando el proceso anterior, se puede construir una variedad tórica $T(\Delta)$ asociada al abanico Δ .

Definición de variedad tórica

Sea Δ un abanico en \mathbb{R}^n . Consideremos la unión disjunta $\cup_{\sigma \in \Delta} U_{\sigma}$ donde dos puntos $x \in U_{\sigma}$ y $x' \in U_{\sigma'}$ están identificados si $\Psi_{\sigma, \sigma'}(x) = x'$. El espacio resultante se llama variedad tórica.

La explosión de \mathbb{R}^2 en el origen es una variedad tórica

La explosión de \mathbb{R}^2 en el origen es una variedad tórica

- 1 Determina la variedad tórica que le corresponde al abanico:

Singularidades de campos de vectores reales: perfil topológico (II)

Clementa Alonso González
Universidad de Alicante

VI Escuela Doctoral de Matemáticas PUCP-UVA 2013