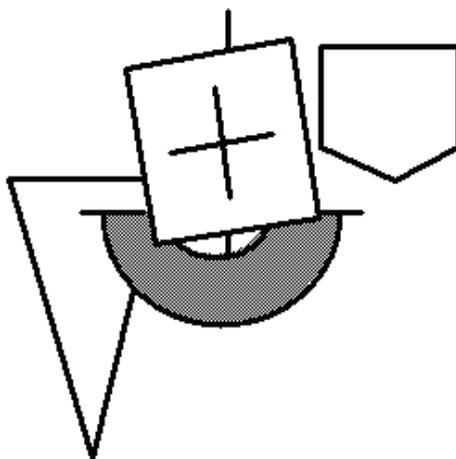


INSTITUTO INTERUNIVERSITARIO
DE ESTUDIOS DE
IBEROAMÉRICA Y PORTUGAL

Seminarios Temáticos



Revista del
Seminario Iberoamericano de Matemáticas

Sede del Seminario

Casas del Tratado, Tordesillas.

Consejo de redacción

José Manuel Aroca, Felipe Cano, José Cano,
Percy Fernández, Jorge Mozo, Jorge Vitório Pereira,
Fernando Sanz, José Seade.

Secretarios de redacción

Alberto Llorente, Lorena López.

VOLUMEN 3
FASCÍCULO V-VI
(2008)

Universidad de Valladolid

Instituto Interuniversitario de Estudios de Iberoamérica y Portugal

Seminario Iberoamericano de Matemáticas

Casas del Tratado

47100 Tordesillas

Valladolid, España

Depósito Legal: VA-359-1996

ISSN: 1136-3894

Imprime: MATA. Plaza de la Universidad nº 2, Valladolid

© 2008 Seminario Iberoamericano de Matemáticas

En esta revista se publican las conferencias del Seminario Iberoamericano de Matemáticas, dependiente del Instituto Interuniversitario de Estudios de Iberoamérica y Portugal, en su sección de la Universidad de Valladolid. Asimismo se publicarán trabajos expositivos de entre 10 y 20 páginas, sobre temas de interés en matemáticas. Los textos deben ser dirigidos a algún miembro del Consejo o del Secretariado de redacción.

La revista se distribuye a bibliotecas de universidades de todo el mundo. Si algún particular desea recibirla, puede solicitarlo a los secretarios de redacción.

Los textos estarán redactados, preferiblemente, en español o portugués, aunque también se admitirán textos en inglés o francés. Los trabajos serán más fácilmente editados si se remiten en formato L^AT_EX 2_ε utilizando clases estándar (como `article` o `amsart`) con paquetes comunes y sin modificar márgenes, cabeceras ni pies de página.

Para cualquier consulta, contactar con los secretarios de redacción.

Consejo de redacción

José Manuel Aroca <aroca@agt.uva.es>

Felipe Cano <fcano@agt.uva.es>

José Cano <jcano@agt.uva.es>

Percy Fernández <pefernan@pucp.edu.pe>

Jorge Mozo <jmozo@maf.uva.es>

Jorge Vitório Pereira <jvp@impa.br>

Fernando Sanz <fsanz@agt.uva.es>

José Seade <jseade@matcuer.unam.mx>

Secretarios de redacción

Alberto Llorente <llorente@agt.uva.es>

Lorena López <llopez@agt.uva.es>

Espacios foliados definidos por mosaicos

Fernando Alcalde Cuesta Pablo González Sequeiros

1. Introducción

Un *mosaico* de \mathbb{R}^2 es una descomposición en subconjuntos llamados *teselas*, generalmente polígonos dispuestos lado con lado, obtenidos por traslación (o mediante un grupo de movimientos rígidos que contenga a las traslaciones) a partir de un conjunto de teselas modelo o *prototeselas*.

El interés por los mosaicos *aperiódicos* (i.e. que no son conservados por ninguna traslación) surge a partir de los trabajos de H. Wang a comienzos de la década de 1960 sobre las máquinas de Turing. Su propósito era encontrar un algoritmo para decidir si una familia de cuadrados con las aristas coloreadas puede teselar el plano de manera coherente. Según un resultado del propio Wang, ese algoritmo existía si y sólo si cualquier conjunto de prototeselas de un mosaico aperiódico lo era también de uno periódico. Sin embargo, en 1966, su alumno R. Berger describió un conjunto de 20.426 teselas aperiódicas, es decir, que sólo forman mosaicos aperiódicos, mostrando que la conjetura de Wang era falsa. Poco después, en 1971, R. M. Robinson redujo este número a 6. De manera independiente, pero algo más tarde, R. Ammann encontró otras 6 teselas aperiódicas. En 1977, R. Penrose construyó un ejemplo con dos teselas, la flecha y la cometa, que sólo recubren el plano de manera aperiódica.

Por otra parte, a comienzos de 1982, el equipo de D. Shechtman descubrió una aleación de aluminio y manganeso que poseía todas las características de un cristal, aunque presentaba un patrón de difracción incompatible con el teorema de Bieberbach sobre clasificación de los grupos cristalográficos. La configuración de los átomos no era respetada por ninguna traslación, pero cualquier configuración finita se repetía de manera uniforme. Surgía así el primer ejemplo de *sólido casi cristalino*, un tipo de aleación metálica con buenas propiedades físicas como una baja conductividad eléctrica o una excelente resistencia térmica.

El descubrimiento de Shechtman ha favorecido el estudio teórico de los mosaicos aperiódicos, ya que éstos proporcionan modelos para los patrones de difracción de los sólidos casi cristalinos. Una cuestión habitual en física del estado sólido es la naturaleza del espectro de una partícula que se mueve en un sólido de ese tipo, lo que conduce a la construcción de un espacio no conmutativo como álgebra de observables. Las relaciones de traslación y contigüidad se han usado en la descripción de tales espacios (véanse [BHZ], [K] y [KP]). Ahora bien,

lo más simple es probar que el espacio de mosaicos construidos a partir de un número finito de prototeselas está dotado de una topología, llamada *topología de Gromov-Hausdorff*, que lo convierte en un espacio foliado compacto (véase [Gh]) y considerar la C^* -álgebra asociada (en el sentido de [Co]). Esta topología hace que los interiores de las teselas obtenidas por traslación a partir de cada prototesela se apilen en abiertos foliados en producto. La hoja que pasa por un mosaico coincide con la órbita de la acción natural de \mathbb{R}^2 , formada por sus trasladados. Las clausuras de las órbitas son subconjuntos cerrados y saturados del espacio foliado de Gromov-Hausdorff. Los conjuntos minimales están caracterizados por la siguiente *condición de repetición uniforme*: para cada $r > 0$, existe $R = R(r) > 0$ tal que cualquier motivo de diámetro $< r$ posee una copia por traslación dentro de cualquier bola de radio R . En la situación que nos ocupa, los conjuntos minimales están formados por mosaicos aperiódicos, en cuyo caso están dotados de foliaciones transversalmente Cantor sin holonomía, o son órbitas finitas de mosaicos periódicos.

Nuestro propósito es describir el espacio foliado de los mosaicos definidos por una familia finita de prototeselas y caracterizar los subconjuntos minimales. Para ilustrar todo esto, nos ocuparemos de un ejemplo concreto: el espacio foliado de los mosaicos de Robinson. Según comprobaremos, la dinámica medible del único minimal está representada por una máquina de sumar binaria.

2. Preliminares

En esta sección recordamos algunas propiedades básicas de los mosaicos del plano, que también pueden verse en [BBG], [GS], [R] o [S].

2.1. Mosaicos

Llamemos *prototesela* a cualquier subconjunto de \mathbb{R}^2 homeomorfo al disco D^2 . Ahora podemos introducir la siguiente definición:

Definición 2.1. Un *mosaico* \mathcal{T} es una familia numerable de subconjuntos de \mathbb{R}^2 , llamados *teselas*, que verifican las siguientes condiciones:

- i) cada tesela es isométrica a una prototesela perteneciente a una subfamilia $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$,
- ii) la familia \mathcal{T} recubre el plano \mathbb{R}^2 ,
- iii) dos teselas diferentes tienen interiores disjuntos.

En tal caso, se dice que \mathcal{T} es un *mosaico de tipo* \mathcal{P} y se escribe $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$.

Cada prototesela $T \in \mathcal{P}$ define un *tipo de isometría* y un *tipo de traslación*. En efecto, dos prototeselas T y T' tienen el mismo tipo de isometría (resp. traslación) y escribimos $T \sim T'$ (resp. $T \sim_t T'$) si existe una isometría de \mathbb{R}^2 que

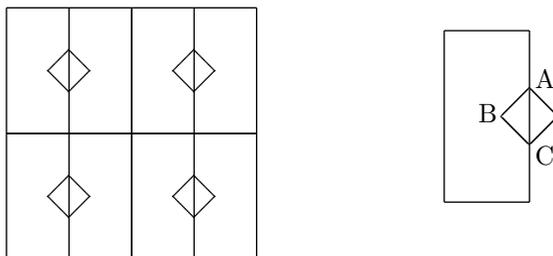
envía T en T' (resp. existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T' = T + v$). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que prototeselas distintas representan tipos de traslación distintos, lo que nos permite identificar los conjuntos \mathcal{P} y \mathcal{P}/\sim_t . Llamaremos *motivo* a cualquier subfamilia finita de \mathcal{T} , que identificaremos habitualmente con su unión, y *patrón* a su tipo de traslación.

Definición 2.2. Un mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ se llama *poligonal* si las prototeselas son polígonos, no siempre convexos. Si usamos el término *lado* en su acepción habitual, pero llamamos *arista* a la intersección de dos teselas, entonces \mathcal{T} es *lado con lado* si verifica las dos siguientes condiciones:

- i) cualquier lado está contenido en una arista y cualquier arista es unión de lados,
- ii) la intersección de dos teselas es conexa.

Dos teselas se intersecan en una unión de lados, en cuyo caso se dicen *adyacentes*, o en una unión de vértices y se llaman *vecinas*.

Observación 2.3. En [GS], se definen mosaicos *arista con arista* imponiendo una condición más restrictiva que la condición (i): cada lado de una tesela es una arista del mosaico y viceversa. La condición (ii) es habitual en la definición de mosaico *normal* [GS]. El siguiente ejemplo es poligonal y verifica (i), pero no (ii):



Este ejemplo permite aclarar la diferencia entre *lado* y *arista*. Observemos que AB y BC son lados de dos teselas diferentes, pero no son aristas del mosaico, y ABC es una arista del mosaico, pero no es lado de ninguna tesela.

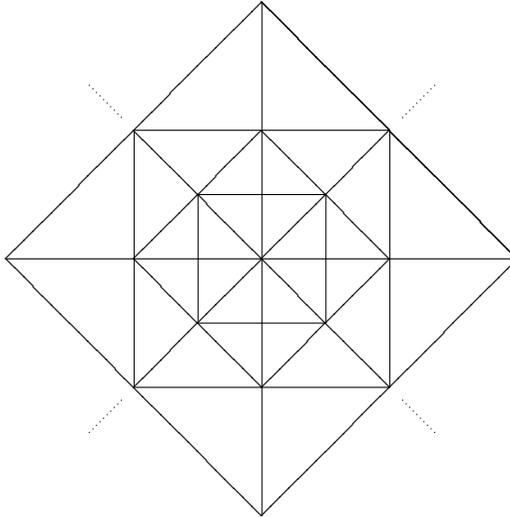
Definición 2.4. Diremos que un mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$

- i) es *de tipo finito* [GS] si sólo posee un número finito de prototeselas salvo traslación, lo que significa que \mathcal{P} es finito, ya que hemos identificado \mathcal{P} con \mathcal{P}/\sim_t ;
- ii) tiene *un número finito de patrones locales* [BBG] si para cada $r > 0$, sólo hay un número finito de motivos de diámetro $< r$ salvo traslación.

La relación entre ambas definiciones es evidente:

Proposición 2.5. *Un mosaico de tipo finito tiene un número finito de patrones locales.* \square

En un mosaico con número finito de patrones locales, el diámetro de las teselas está acotado inferiormente, pero nada nos asegura que lo esté superiormente, como prueba el siguiente ejemplo:

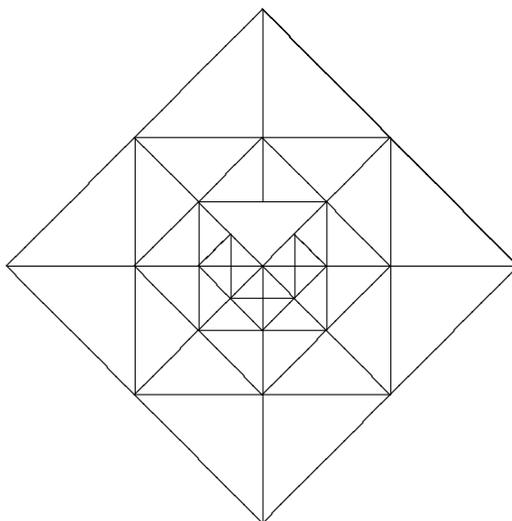


Ahora bien, si añadimos esa condición, tendremos fácilmente el recíproco:

Proposición 2.6. *Si \mathcal{T} tiene un número finito de patrones locales y el diámetro de las teselas está acotado superiormente, entonces \mathcal{T} es de tipo finito.* \square

Definición 2.7 ([GS]). Un mosaico \mathcal{T} se dice *localmente finito en x* si existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B(x, \varepsilon)$ de centro x y radio ε sólo corta a un número finito de teselas de \mathcal{T} . En tal caso, diremos que x es un *punto regular* de \mathcal{T} y llamaremos *puntos singulares* a aquellos que no sean regulares. Diremos que \mathcal{T} es *localmente finito* si todos los puntos $x \in \mathbb{R}^2$ son regulares.

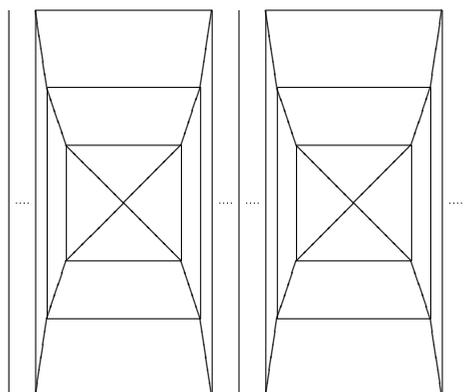
El siguiente ejemplo (descrito en [GS]) tiene un único punto singular en el origen:



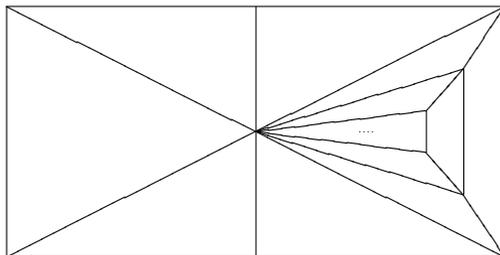
En general, para cada punto $x \in \mathbb{R}^2$, cada número real $\varepsilon > 0$ y cada prototesela $T \in \mathcal{P}$, sólo hay una cantidad finita de teselas con el tipo de traslación de T que corten a la bola $B(x, \varepsilon)$ (véase [GSeq]). Las siguientes condiciones garantizan que el número de tipos de traslación es finito y por consiguiente \mathcal{T} es localmente finito:

Proposición 2.8. *Cualquier mosaico con un número finito de patrones locales y diámetro de las teselas acotado superiormente es localmente finito.* \square

Si se suprime la segunda condición, la proposición no es cierta. En efecto, el siguiente ejemplo tiene un número finito de patrones locales, pero no es localmente finito:



Aunque ninguno de los dos ejemplos anteriores es lado con lado, no cabe esperar que estos mosaicos sean localmente finitos:



2.2. Conjuntos de Delone

Ahora nos interesamos por las versiones discretas de las propiedades anteriores:

Definición 2.9. Sea \mathcal{T} un mosaico de tipo \mathcal{P} . La elección de un punto base en cada prototesela determina una familia $D_{\mathcal{T}}$ de puntos base x_T de cualquier tesela $T \in \mathcal{T}$. Diremos que $D_{\mathcal{T}}$ es un *conjunto de puntos base de \mathcal{T}* .

Proposición 2.10. *Un mosaico \mathcal{T} es localmente finito si y sólo si cualquier conjunto de puntos base $D_{\mathcal{T}}$ es discreto y cerrado.*

Demostración. Si \mathcal{T} es localmente finito, cualquier conjunto de puntos base $D_{\mathcal{T}}$ es discreto, ya que $\# B(x, \varepsilon) \cap D_{\mathcal{T}} \leq \# \{T \in \mathcal{T} / T \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\} < +\infty$ para cada $x \in D_{\mathcal{T}}$ y cada $\varepsilon > 0$. Para comprobar que $D_{\mathcal{T}}$ es cerrado, consideramos una sucesión $x_n \in D_{\mathcal{T}}$ convergente a un punto $x \in \mathbb{R}^2$ y distinguimos dos casos:

- i) Si el conjunto $\{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, entonces $\{x_n\}$ posee una subsucesión de términos distintos, convergente a x , lo que implica que cualquier bola $B(x, \varepsilon)$ es cortada por una infinidad de teselas, en contra de lo supuesto.
- ii) Si el conjunto $\{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ es finito, entonces $\{x_n\}$ posee una subsucesión estacionaria convergente a x y por tanto $x \in D_{\mathcal{T}}$.

Para probar el recíproco, razonamos por reducción al absurdo suponiendo que existen $x \in \mathbb{R}^2$ y $\varepsilon > 0$ tales que la bola $B(x, \varepsilon)$ es cortada por una infinidad de teselas. De hecho, según hemos visto, podemos suponer que representan una infinidad de tipos de isometría distintos. Por consiguiente, el punto base de cada tesela se puede sustituir por un punto perteneciente a $B(x, \varepsilon)$ de manera que la intersección del nuevo conjunto base $D_{\mathcal{T}}$ y de la bola $B(x, \varepsilon)$ es infinita. Ahora bien, como el conjunto $D_{\mathcal{T}}$ es discreto y cerrado, esa intersección debe ser finita. \square

Definición 2.11. Se llama *conjunto de Delone* a un subconjunto D de \mathbb{R}^2 que verifica las dos siguientes condiciones (véase [LP]) :

- i) D es *uniformemente discreto*, i.e. existe $r > 0$ tal que cualquier bola $B(x, r)$ contiene a lo sumo un punto de D ;
- ii) D es *relativamente denso*, i.e. existe $R > 0$ tal que cualquier bola $B(x, R)$ contiene al menos un punto de D .

Proposición 2.12. *Cualquier mosaico de tipo finito admite un conjunto de Delone, i.e un conjunto uniformemente discreto y relativamente denso de puntos base.*

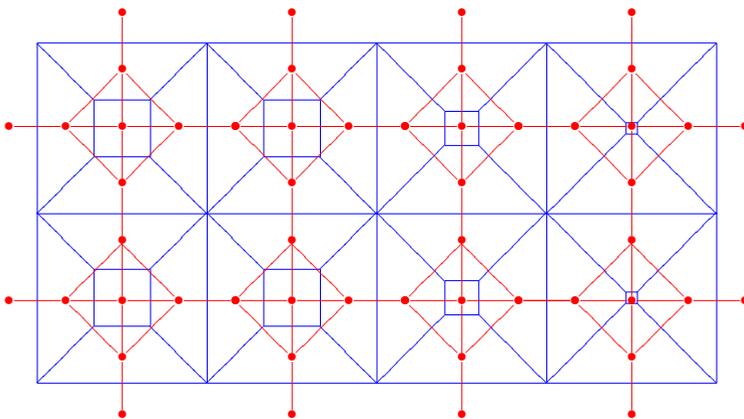
Demostración. Si \mathcal{T} es un mosaico de tipo finito, existen constantes $r > 0$ y $R > 0$ tales que cualquier tesela $T \in \mathcal{T}$ verifica:

$$B(x_T, r) \subset T \subset B(y_T, R)$$

para algún par de puntos x_T y y_T de T . En tal caso, los puntos x_T correspondientes a las prototeselas T definen un conjunto base $D_{\mathcal{T}}$. Puesto que las teselas se obtienen por traslación a partir de las prototeselas, podemos suponer que los puntos x_T considerados inicialmente coinciden con los puntos de $D_{\mathcal{T}}$. Ahora podemos comprobar que $D_{\mathcal{T}}$ es un conjunto de Delone:

- i) El conjunto $D_{\mathcal{T}}$ es uniformemente discreto, ya que $B(x, \frac{r}{3}) \cap D_{\mathcal{T}} \subset \{x\}$ para cualquier punto $x \in \mathbb{R}^2$. En efecto, en caso contrario, el conjunto $D_{\mathcal{T}}$ contendría dos elementos diferentes x_T y $x_{T'}$ tales que $d(x_T, x_{T'}) \leq d(x_T, x) + d(x, x_{T'}) < r$. Luego $B(x_T, r)$ cortaría a T' y no estaría contenida en T .
- ii) El conjunto $D_{\mathcal{T}}$ es relativamente denso, ya que cualquier punto $x \in \mathbb{R}^2$ pertenece a alguna tesela T , cada tesela T está contenida en la bola $B(y_T, R)$ y por tanto $d(x, D_{\mathcal{T}}) \leq d(x, x_T) < 2R$. □

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco no es cierto, ya que un mosaico puede admitir un conjunto de Delone, aunque no sea de tipo finito:



3. Espacio foliado de Gromov-Hausdorff

Dado un conjunto finito de prototelas \mathcal{P} , consideremos el conjunto $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ de los mosaicos de tipo \mathcal{P} . Recordemos que la traslación de un mosaico produce generalmente un mosaico distinto, ya que dos mosaicos son idénticos si y sólo si poseen las mismas teselas. Para ilustrar lo que decimos, supongamos que \mathcal{P} consta de un único cuadrado de lado unidad. Si $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ es el mosaico periódico correspondiente y v es un vector de \mathbb{R}^2 , entonces $\mathcal{T} + v = \mathcal{T}$ si y sólo si $v \in \mathbb{Z}^2$. Luego $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ es el conjunto cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{T}^2$.

3.1. Topología de Gromov-Hausdorff

Nos proponemos describir una topología sobre $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$, llamada *topología de Gromov-Hausdorff*, que hace próximos a dos mosaicos cuando coinciden en una gran bola centrada en el origen, salvo pequeñas traslaciones (véanse [BBG] y [Gh]).

Definición 3.1. Dados dos mosaicos $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$, consideramos el conjunto

$$A = \{ R > 0 / B_{\mathcal{T}}(0, R) = B_{\mathcal{T}'}(0, R) \}$$

y definimos

$$R(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \begin{cases} \sup A & \text{si } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } A = \emptyset, \end{cases}$$

donde $B_{\mathcal{T}}(0, R)$ y $B_{\mathcal{T}'}(0, R)$ designan las trazas de los mosaicos \mathcal{T} y \mathcal{T}' sobre la bola cerrada $B_{\mathbb{R}^2}(0, R)$. Observemos que $R(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = +\infty$ si y sólo si $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Dados $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$ y $R > 0$, denotamos

$$U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}) = \{ \mathcal{T}' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P}) / \exists v, v' \in \mathbb{R}^2 : \|v\| < \varepsilon, \|v'\| < \varepsilon', R(\mathcal{T}+v, \mathcal{T}'+v') > R \}.$$

Estos conjuntos forman una base de topología y la topología que generan se llama *topología de Gromov-Hausdorff*.

De hecho, como veremos a continuación, la topología de Gromov-Hausdorff es métrica (véase [BBG]).

Definición 3.2. Para cada par $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$, consideramos el conjunto

$$B = \{ \varepsilon \in (0, 1) / \exists v, v' \in B_{\mathbb{R}^2}(0, \varepsilon) : B_{\mathcal{T}+v}(0, \frac{1}{\varepsilon}) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, \frac{1}{\varepsilon}) \}$$

y definimos la distancia

$$d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \begin{cases} \inf B & \text{si } B \neq \emptyset, \\ 1 & \text{si } B = \emptyset. \end{cases}$$

Por ejemplo, el mosaico periódico \mathcal{T} y su trasladado $\mathcal{T}' = \mathcal{T} + (\frac{1}{2}, 0)$ (donde los puntos distinguidos señalan el origen del plano) verifican que $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \frac{1}{4}$.



En efecto, para cada $\frac{1}{4} < \varepsilon < 1$, los vectores $v = (\frac{1}{4}, 0)$ y $v' = (-\frac{1}{4}, 0)$ verifican que $B_{\mathcal{T}+v}(0, \frac{1}{\varepsilon}) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, \frac{1}{\varepsilon})$. Pero si w y w' son dos vectores de longitud $< \frac{1}{4}$, entonces $B_{\mathcal{T}+w}(0, \frac{1}{\varepsilon}) \neq B_{\mathcal{T}'+w'}(0, \frac{1}{\varepsilon})$ para cualquier $0 < \varepsilon < 1$.

Proposición 3.3. *Para cada par $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$, cada $R > 1$ y cada $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$, el conjunto $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$ es un abierto de la topología definida por la métrica d . Además cualquier bola $B_d(\mathcal{T}, \varepsilon)$ es igual al conjunto $U_{\varepsilon, \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}}(\mathcal{T})$.*

Demostración. Como la segunda afirmación es evidente, nos basta probar que hay una bola centrada en cualquier mosaico $\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$ contenida en $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$. Por definición, existen vectores v y v' con $\|v\| < \varepsilon$ y $\|v'\| < \varepsilon'$ tales que $B_{\mathcal{T}+v}(0, R) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, R)$. Si $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon' - \|v'\|}{2}$ y $R' = R + \varepsilon'' + \|v'\|$, entonces $U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}') \subset U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$. En efecto, si $\mathcal{T}'' \in U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}')$, existen vectores w' y w'' con $\|w'\|, \|w''\| < \varepsilon''$ tales que $B_{\mathcal{T}'+w'}(0, R') = B_{\mathcal{T}''+w''}(0, R')$. Esto implica que:

$$B_{\mathcal{T}+v}(0, R) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, R) = B_{\mathcal{T}''+w''-w'+v'}(0, R)$$

donde $\|w'' - w' + v'\| < 2\varepsilon'' + \|v'\| = \varepsilon'$. Por fin, tomando $r = \min\{\varepsilon'', \frac{1}{R'}\}$, tenemos que $B_d(\mathcal{T}', r) \subset U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}') \subset U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$. \square

Más importante es la siguiente propiedad:

Teorema 3.4. *Si el conjunto de prototeselas \mathcal{P} es finito, el espacio $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ es compacto.*

Demostración. Veremos que $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ es secuencialmente compacto usando un argumento diagonal clásico. Sea $\{\mathcal{T}_n\}$ una sucesión en $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Fijemos un número $\delta > \max\{\delta(T) \mid T \in \mathcal{T}\}$ y observemos que la bola $B(0, \delta)$ sólo contiene un número finito de motivos salvo traslación. Luego $\{\mathcal{T}_n\}$ contiene una subsucesión $\{\mathcal{T}_{n,1}\}$ tal que las bolas $B_{\mathcal{T}_{n,1}}(0, \delta)$ contienen traslaciones de un mismo motivo M_1 y por tanto de una misma bola $B_{\mathcal{T}_{n,1}}(0, \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. Para simplificar, sustituiremos las clases de traslación por sus representantes y supondremos que esas traslaciones son triviales. Por recurrencia, obtenemos entonces una subsucesión

$\{\mathcal{T}_{n,m}\}$ de $\{\mathcal{T}_{n,m-1}\}$ tal que las bolas $B_{\mathcal{T}_{n,m}}(0, m\delta)$ contienen un mismo motivo M_m y por tanto una misma bola $B_{\mathcal{T}_{n,m}}(0, \varepsilon_m)$ donde $\lim_{m \rightarrow +\infty} \varepsilon_m = +\infty$. Construimos así una sucesión exhaustiva de motivos

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_{m-1} \subset M_m \subset \cdots \subset \bigcup_{m \geq 1} M_m = \mathbb{R}^2$$

que define un mosaico \mathcal{T} de \mathbb{R}^2 . Ahora la subsucesión $\{\mathcal{T}_{m,m}\}$ de $\{\mathcal{T}_n\}$ converge a \mathcal{T} . En efecto, dado $N \geq 1$, cualquier motivo M_m con $\varepsilon_m \geq N$ verifica que:

$$B_{\mathcal{T}_{m,m}}(0, N) \subset M_m \subset \mathcal{T}$$

y por tanto $R(\mathcal{T}_{m,m}, \mathcal{T}) \geq N$, lo que garantiza la convergencia. \square

En la literatura sobre mosaicos, suele afirmarse que la envoltura de un mosaico con número finito de patrones locales es compacta. Ahora bien, un mosaico con esa propiedad no tiene por qué ser localmente finito, según hemos probado en § 2.1, de manera que el argumento usado antes no es válido.

3.2. Estructura foliada

El grupo de traslaciones \mathbb{R}^2 opera de manera natural como grupo de transformaciones del espacio de mosaicos $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. En efecto, se puede comprobar fácilmente que la acción natural

$$(v, \mathcal{T}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{T}(\mathcal{P}) \longmapsto \mathcal{T} + v \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$$

es continua. Además, si el conjunto \mathcal{P} es finito, la acción es *localmente libre*, es decir, cualquier grupo de isotropía $Iso(\mathcal{T}) = \{v \in \mathbb{R}^2 / \mathcal{T} + v = \mathcal{T}\}$ es discreto. Esto implica que la acción define una foliación de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$, lo que significa que las hojas son las órbitas de la acción. No obstante, por su interés, vamos a mostrar este hecho de manera directa. Para ello, comenzamos construyendo lo que después va a ser una transversal completa, es decir, un subespacio que corta a todas las hojas. Como ya hemos dicho, un conjunto de puntos base D de las prototeselas de \mathcal{P} determina un conjunto de puntos base $D_{\mathcal{T}} = \{x_{\mathcal{T}} / \mathcal{T} \in \mathcal{T}\}$ para cualquier mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$.

Definición 3.5. Llamamos *transversal* al conjunto $\Sigma = \Sigma(D)$ formado por todos los mosaicos $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ tales que $0 \in D_{\mathcal{T}}$.

Proposición 3.6. Si el conjunto \mathcal{P} es finito, entonces $\Sigma = \Sigma(D)$ es un subespacio compacto y totalmente desconexo de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$.

Demostración. La prueba del carácter compacto de Σ es justamente la usada en el caso de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Para probar que Σ es un subespacio totalmente desconexo

de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$, nos basta comprobar que la topología inducida está definida por una ultramétrica. Ante todo, se puede mostrar muy fácilmente que la expresión:

$$d_{\Sigma}(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = e^{-R(\mathcal{T}, \mathcal{T}')}$$

define una ultramétrica sobre Σ . Lo siguiente es verificar que la topología inducida sobre Σ por la topología de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ está generada por las bolas métricas

$$B_{d_{\Sigma}}(\mathcal{T}, e^{-R}) = \{\mathcal{T}' \in \Sigma / d_{\Sigma}(\mathcal{T}, \mathcal{T}') < e^{-R}\} = \{\mathcal{T}' \in \Sigma / R(\mathcal{T}, \mathcal{T}') > R\}.$$

Para probar que cualquier abierto básico $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}) \cap \Sigma$ es un abierto de la topología definida por d_{Σ} , consideramos $\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}) \cap \Sigma$ y tomamos ε'' y R' como en la proposición 3.3. En tal caso, tenemos que:

$$\mathcal{T}' \in B_{d_{\Sigma}}(\mathcal{T}', e^{-R'}) \subset U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}') \subset U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}).$$

Recíprocamente, la bola $B_{d_{\Sigma}}(\mathcal{T}, e^{-R}) = U_{\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, R}(\mathcal{T}) \cap \Sigma$, siendo $r > 0$ una constante tal que cualquier bola con ese radio contiene a lo sumo un punto del conjunto de Delone $D_{\mathcal{T}}$. □

Teorema 3.7. *La acción del grupo de traslaciones \mathbb{R}^2 define una estructura de espacio foliado sobre el espacio $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$.*

Demostración. La idea es muy simple, ya que la topología de Gromov-Hausdorff hace precisamente que los interiores de las teselas se apilen en abiertos foliados en producto. De manera explícita, empecemos observando que la topología de Σ está generada por los conjuntos abiertos y cerrados \mathfrak{B}_M formados por los mosaicos \mathcal{T} que contienen al motivo M . Para cada prototesela $T \in \mathcal{P}$, la aplicación

$$\varphi_T : (v, \mathcal{T}') \in T \times \mathfrak{B}_T \longmapsto \mathcal{T}' + v \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$$

es una identificación sobre su imagen. Ahora bien, su restricción a $\mathring{T} \times \mathfrak{B}_T$ es inyectiva y define un homeomorfismo

$$\varphi_T : \mathring{T} \times \mathfrak{B}_T \longrightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{P})$$

sobre su imagen, un abierto distinguido de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. De la misma manera, si llamamos M al motivo obtenido al unir dos teselas adyacentes o todas las teselas vecinas con un mismo vértice común, la aplicación

$$\varphi_M : (v, \mathcal{T}') \in M \times \mathfrak{B}_M \longmapsto \mathcal{T}' + v \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$$

es una identificación sobre su imagen. En este caso, no basta con sustituir M por su interior para hacerla inyectiva. Sin embargo, sabemos que la isotropía $Iso(\mathcal{T})$ de cualquier mosaico \mathcal{T} es discreta. De hecho, lo es de manera uniforme, es decir, existe $r > 0$ tal que cualquier mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ verifica $\mathcal{T} + v \neq \mathcal{T}$ si $0 < \|v\| < r$. Ahora, si x pertenece a la intersección de dos teselas adyacentes o es vértice común de una familia de teselas vecinas, podemos sustituir Σ por

una nueva transversal Σ_x de manera que x pertenezca al conjunto de Delone de algún elemento de Σ_x . Denotemos \mathfrak{B}_M^x el subconjunto abierto y cerrado de Σ_x determinado por M . Si además sustituimos M por $B(0, r)$, entonces la aplicación

$$\varphi_x : (v, T') \in B(0, r) \times \mathfrak{B}_M^x \longmapsto T' + v \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$$

es un homeomorfismo sobre un abierto distinguido de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Cada cambio de carta está dado por una traslación: la que envía el punto base x_T en el interior de T sobre el punto $x \in \partial T$. \square

3.3. Envoltura de un mosaico aperiódico y repetitivo

El espacio de Gromov-Hausdorff $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ puede ser extremadamente grande, por lo que nos interesan aquellos cerrados saturados que son minimales por inclusión. Nuestro propósito es caracterizar esta propiedad.

Definición 3.8. Dado un mosaico \mathcal{T} , llamamos *envoltura de \mathcal{T}* a la clausura $\Omega_{\mathcal{T}}$ de la órbita $L_{\mathcal{T}} = \{\mathcal{T} + v/v \in \mathbb{R}^2\}$. Recordemos que $\Omega_{\mathcal{T}}$ es un conjunto minimal si y sólo si todas las órbitas contenidas en $\Omega_{\mathcal{T}}$ son densas.

Definición 3.9. i) Un mosaico \mathcal{T} es *repetitivo* [BBG] o tiene la *propiedad de isomorfismo local* [RW] si para cada motivo M , existe $R = R(M) > 0$ tal que cualquier bola de radio R contiene una copia por traslación de M .

ii) Un mosaico \mathcal{T} es *uniformemente repetitivo* si dado $r > 0$, existe $R = R(r) > 0$ tal que cualquier bola de radio R contiene una copia por traslación de cualquier motivo M de diámetro $< r$.

Teorema 3.10. *Para cualquier mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) \mathcal{T} es repetitivo;

ii) \mathcal{T} es uniformemente repetitivo;

iii) $\Omega_{\mathcal{T}}$ es minimal.

Demostración. Comenzamos por la prueba de la implicación (i) \Rightarrow (iii). Hemos de probar que la órbita de cualquier mosaico $\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}}$ es densa, es decir, su envoltura $\Omega_{\mathcal{T}'} = \Omega_{\mathcal{T}}$. Como sabemos que $\Omega_{\mathcal{T}'} \subset \Omega_{\mathcal{T}}$, nos basta comprobar que $\mathcal{T} \in \Omega_{\mathcal{T}'}$ y por tanto $\Omega_{\mathcal{T}} \subset \Omega_{\mathcal{T}'}$. Fijemos un número $r > 0$ y consideremos un motivo M que contenga a la bola $B_{\mathcal{T}}(0, r)$. Por hipótesis, hay una constante $R = R(M) \geq r > 0$ tal que para cada punto $x \in \mathbb{R}^2$, existe un vector $v \in \mathbb{R}^2$ verificando:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}}(v, r) \subset M + v \subset B_{\mathcal{T}}(x, R).$$

Por otra parte, como $\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}}$, existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$B_{\mathcal{T}'}(0, R) = B_{\mathcal{T}'-x}(0, R) = B_{\mathcal{T}}(x, R) - x.$$

Combinando ambas relaciones, tenemos que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v - x = B_{\mathcal{T}}(v, r) - x \subset B_{\mathcal{T}}(x, R) - x = B_{\mathcal{T}-x}(0, R) = B_{\mathcal{T}'}(0, R),$$

de donde deducimos que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v - x = B_{\mathcal{T}}(v, r) - x = B_{\mathcal{T}-x}(v - x, r) = B_{\mathcal{T}'}(v - x, r).$$

Si denotamos $w = v - x$, podemos escribir:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) = B_{\mathcal{T}'}(w, r) - w = B_{\mathcal{T}'-w}(0, r).$$

Luego tenemos un mosaico $\mathcal{T}' - w \in L_{\mathcal{T}'}$ tal que $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}' - w) \leq e^{-r}$. Esto prueba que $\mathcal{T} \in \Omega_{\mathcal{T}'} = \bar{L}_{\mathcal{T}'}$.

Para probar la implicación (iii) \Rightarrow (i), fijado $r > 0$, definimos un conjunto

$$U_S = \{\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}} / \exists v \in \mathbb{R}^2 : B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}'}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S)\}$$

para cada $S \geq r$. Veamos que estos conjuntos forman un recubrimiento abierto de $\Omega_{\mathcal{T}}$. Antes de comprobar que los conjuntos U_S son abiertos, conviene observar que los conjuntos

$$U_{\varepsilon, R}(\mathcal{T}) = \{\mathcal{T}' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P}) / \exists v' \in \mathbb{R}^2 : \|v'\| < \varepsilon, R(\mathcal{T}, \mathcal{T}' + v') > R\}$$

forman una base de entornos distinguidos de \mathcal{T} . Basta aplicar un argumento similar al usado en la prueba del teorema 3.7. Ahora, dado $\mathcal{T}' \in U_S$, existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}'}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, r + \|v\|) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S).$$

Tomando $S' = r + \|v\|$ y $\varepsilon \leq S - S'$, tenemos que $\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon, S'}(\mathcal{T}') \subset U_S$. En efecto, si $\mathcal{T}'' \in U_{\varepsilon, S'}(\mathcal{T}')$, existe $v'' \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v''\| < \varepsilon$ y

$$B_{\mathcal{T}'}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S') = B_{\mathcal{T}''+v''}(0, S').$$

Luego

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}'}(v, r) = B_{\mathcal{T}''+v''}(v, r) = B_{\mathcal{T}''}(v - v'', r) + v'' \subset B_{\mathcal{T}''+v''}(0, S').$$

Así, si $w = v - v''$, tenemos que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + w = B_{\mathcal{T}''}(w, r) \subset B_{\mathcal{T}''}(-v'', S') \subset B_{\mathcal{T}''}(0, S)$$

y por tanto $\mathcal{T}'' \in U_S$. Por otra parte, cualquier elemento \mathcal{T}' de $\Omega_{\mathcal{T}}$ pertenece a algún abierto U_S . Como hemos supuesto que la envoltura $\Omega_{\mathcal{T}}$ es minimal, coincide con $\Omega_{\mathcal{T}'}$ y por tanto $\mathcal{T} \in \Omega_{\mathcal{T}'}$. Luego, para cada $r > 0$, existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + x = B_{\mathcal{T}'}(x, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S)$$

siendo $S = r + \|x\|$. Así pues, \mathcal{T}' pertenece al conjunto U_S . Observemos que el recubrimiento $\{U_S\}_{S \geq r}$ es monótono creciente. Luego, por compacidad, existe $R \geq r$ tal que $U_R = \Omega_{\mathcal{T}}$. Para cada punto $y \in \mathbb{R}^2$, existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}-y}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}-y}(0, R).$$

Mediante la traslación por y , deducimos que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v + y = B_{\mathcal{T}-y}(v, r) + y \subset B_{\mathcal{T}-y}(0, R) + y = B_{\mathcal{T}}(y, R).$$

Por tanto, el vector $w = v + y \in \mathbb{R}^2$ verifica que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + w \subset B_{\mathcal{T}}(y, R).$$

Como cualquier motivo M está contenido en alguna bola centrada en el origen de radio suficientemente grande $r > 0$, hemos probado que \mathcal{T} es repetitivo.

Por último, probamos la implicación $(iii) \Rightarrow (ii)$. En la prueba de $(iii) \Rightarrow (i)$, hemos obtenido una constante $R = R(M) > 0$ que depende del motivo M . Ahora nos interesa obtener una nueva constante $R = R(r) > 0$ válida para cualquier motivo M de diámetro $< r$. Dados $r > 0$ y $x \in \mathbb{R}^2$, definimos un conjunto

$$U_{S,x} = \{\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}} / \exists v \in \mathbb{R}^2 : B_{\mathcal{T}}(x, \frac{r}{2}) + v = B_{\mathcal{T}'}(x + v, \frac{r}{2}) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S)\}$$

asociado a cada $S \geq \frac{r}{2}$. Como antes, deducimos que existe $R = R(x) > 0$ tal que para cada punto $y \in \mathbb{R}^2$, existe $v \in \mathbb{R}^2$ verificando:

$$B_{\mathcal{T}}(x, \frac{r}{2}) + v \subset B_{\mathcal{T}}(y, R).$$

Lo mismo ocurre para cualquier motivo M que esté contenido en $B_{\mathcal{T}}(x, \frac{r}{2})$. Ahora bien, como \mathcal{T} tiene un número finito de patrones locales, sólo hay un número finito de motivos de diámetro $< r$ salvo traslación. Fijemos representantes M_1, \dots, M_n de dichas clases de traslación, contenidos en bolas de radio $\frac{r}{2}$ centradas en puntos x_1, \dots, x_n . Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y cada punto $y \in \mathbb{R}^2$, existe $v_i \in \mathbb{R}^2$ tal que $M_i + v_i \subset B_{\mathcal{T}}(y, R(x_i))$. Como cualquier motivo M de diámetro $< r$ se obtiene por traslación a partir de algún motivo M_i , tomando $R = \max\{R(x_1), \dots, R(x_n)\}$, tendremos que:

$$M + v_i - v = M_i + v_i \subset B_{\mathcal{T}}(y, R(x_i)) \subset B_{\mathcal{T}}(y, R)$$

donde $v \in \mathbb{R}^2$ verifica que $M = M_i + v$. □

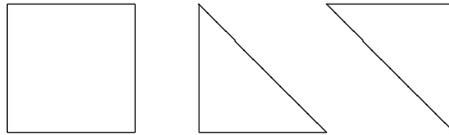
El enunciado de la equivalencia $(i) \Leftrightarrow (iii)$ puede verse en [BBG] y [RW]. La prueba en [ALM], [B] y [LR], aunque el contexto es algo diferente. La equivalencia $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ aparece en [ALM] y [LR] en ese mismo contexto.

Para terminar a sección, vamos a interesarnos por la caracterización de los conjuntos minimales sin holonomía.

Definición 3.11. Un mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ se dice:

- i) *periódico* si hay dos vectores linealmente independientes v y w tales que $\mathcal{T} + v = \mathcal{T}$ y $\mathcal{T} + w = \mathcal{T}$;
- ii) *aperiódico* si $\mathcal{T} + v \neq \mathcal{T}$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Evidentemente hay mosaicos que no son ni periódicos, ni aperiódicos. Desde el punto de vista del tipo de hojas que definen, resulta obvio que la órbita de un mosaico periódico es compacta, mientras que la órbita de un mosaico aperiódico tiene holonomía trivial. Los otros mosaicos dan lugar a hojas no compactas con holonomía no trivial. Según un resultado de G. Hector (véase [H]), obtenido de manera independiente por D. B. A. Epstein, K. C. Millet y D. Tischler, los mosaicos que no son ni periódicos, ni aperiódicos forman un subconjunto magro de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Por otra parte, conviene observar que las hojas compactas pueden ser aisladas o no. Consideremos el conjunto \mathcal{P} formado por las tres siguientes prototeselas:



Llamemos \mathcal{T} al mosaico periódico por cuadrados y \mathcal{T}_n al mosaico obtenido al sustituir cada cuadrado por la unión de ambos triángulos fuera de un bloque de lado n . Es evidente que los mosaicos \mathcal{T}_n convergen al mosaico \mathcal{T} y por tanto \mathcal{T} es un punto de acumulación de cualquier transversal Σ (determinada por elección de un punto base en cada prototesela). Ahora bien, si modificamos los tres lados de un triángulo con lengüetas y los del otro con ranuras complementarias, obtenemos otro conjunto de tres prototeselas \mathcal{P} , pero ahora \mathcal{T} es un punto aislado de la transversal correspondiente Σ . Gracias a la proposición 3.6, si un conjunto de prototeselas \mathcal{P} no permite teselar el plano de manera periódica, entonces el espacio foliado $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ posee una transversal completa homeomorfa al conjunto de Cantor. Diremos que la foliación es *transversalmente Cantor*.

Lema 3.12. *La envoltura de un mosaico aperiódico y repetitivo sólo contiene mosaicos aperiódicos.*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que la envoltura $\Omega_{\mathcal{T}}$ de un mosaico aperiódico y repetitivo $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ contiene un mosaico $\mathcal{T}' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ tal que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}' + v$ para algún vector $v \neq 0$. Como $\Omega_{\mathcal{T}}$ es minimal, tenemos que $\mathcal{T} \in \Omega_{\mathcal{T}} \subset \Omega_{\mathcal{T}'}$. Luego, para cada $R > \|v\| > 0$, existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, R) = B_{\mathcal{T}'-x}(0, R) = B_{(\mathcal{T}'+v)-x}(0, R).$$

Pero esto implica que:

$$B_{\mathcal{T}+v}(0, R - \|v\|) = B_{(\mathcal{T}'+v)-x}(0, R - \|v\|) = B_{\mathcal{T}}(0, R - \|v\|).$$

Por consiguiente, en contra de lo supuesto, \mathcal{T} no es aperiódico. \square

Combinando varios resultados previos, obtenemos el siguiente resultado:

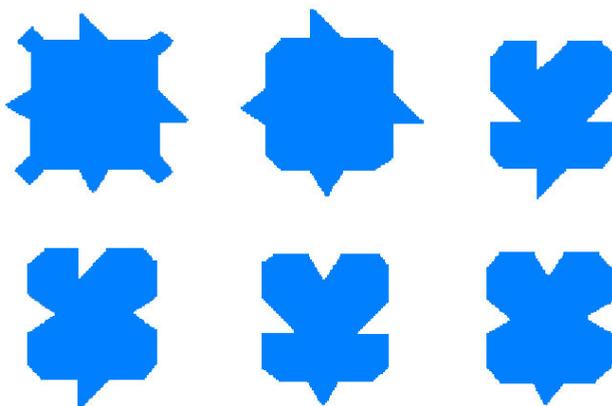
Teorema 3.13. *La envoltura de cualquier mosaico aperiódico y repetitivo es un conjunto minimal, transversalmente Cantor y sin holonomía.* \square

4. Espacio foliado de los mosaicos de Robinson

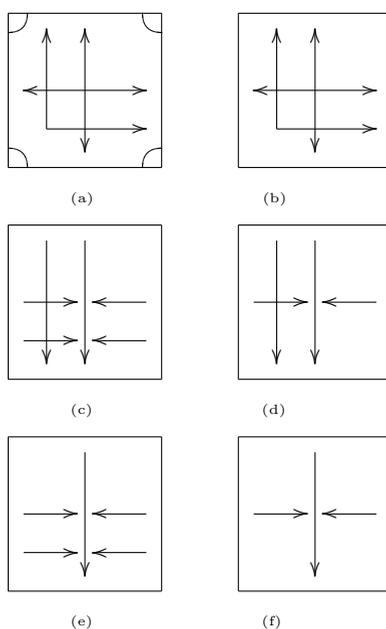
El propósito de esta sección es ilustrar lo anterior por medio de un ejemplo clásico.

4.1. Mosaicos de Robinson

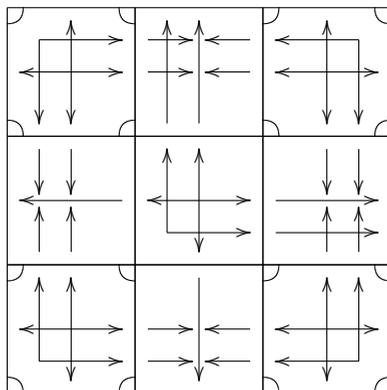
Llamamos *mosaicos de Robinson* a cualquiera de los mosaicos construidos a partir de las 6 prototeselas descubiertas por Raphael M. Robinson en 1971 (véase [Ro]). Se trata de cuadrados con modificaciones en sus lados y esquinas. Si en un primer momento nos olvidamos de las modificaciones de los lados, podemos distinguir dos tipos: una prototesela con prolongaciones en las esquinas, denominada *con cuernos*, y otras con esquinas recortadas, denominadas *sin cuernos*. La idea es partir de un mosaico periódico por cuadrados y modificar éstos para que aparezcan ambos tipos de teselas, alternados por filas y columnas. Para suprimir la periodicidad, se introducen modificaciones en los lados, consistentes en lengüetas y ranuras de dos tipos: simétricas y asimétricas.



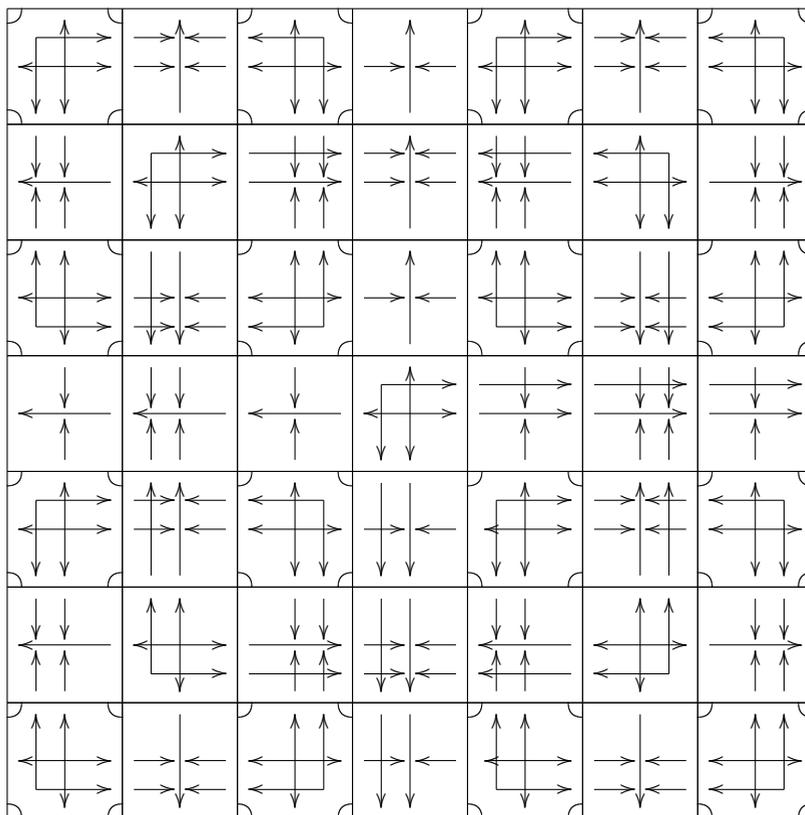
Hay otra representación más cómoda, en la que las modificaciones de lados y esquinas se sustituyen por flechas y marcas circulares respectivamente (véanse [GS] y [Ro]). Las flechas que apuntan hacia dentro corresponden a ranuras y las que lo hacen hacia fuera a lengüetas. Además las flechas simples indican simetría y las dobles asimetría. Las marcas circulares señalan que la tesela tiene cuernos. Se llama *cruces* a las dos primeras prototeselas y *brazos* a las restantes. Más adelante veremos la razón de esta terminología.



Cada vértice del mosaico admite una sólo marca circular y cada punta de flecha apunta a la cola de otra flecha en una tesela adyacente. La dirección de las dobles flechas permite distinguir distintos tipos de cruces. Así, los cruces de la figura apuntan *hacia arriba* y *a la derecha*. Aclaremos que las teselas de los mosaicos de Robinson pueden obtenerse a partir de las 6 prototeselas por traslación, pero también mediante giros de 90, 180 y 270 grados o por reflexión respecto del eje de ordenadas. Es decir, se trata realmente de 32 prototeselas. Por otra parte, la mayoría de los mosaicos de Robinson se construye mediante un *proceso repetitivo*. Partimos de un cruce con cuernos, con una de las cuatro orientaciones posibles, y construimos un bloque de 3×3 teselas. Empezamos replicando la pieza inicial (mediante giros de 90, 180 y 270 grados) y después añadimos un motivo en forma de cruz, formado por 5 teselas. Para ello, elegimos la pieza central de la cruz, necesariamente un cruce sin cuernos, y completamos el resto de la cruz de la única manera posible tras la elección del cruce central.

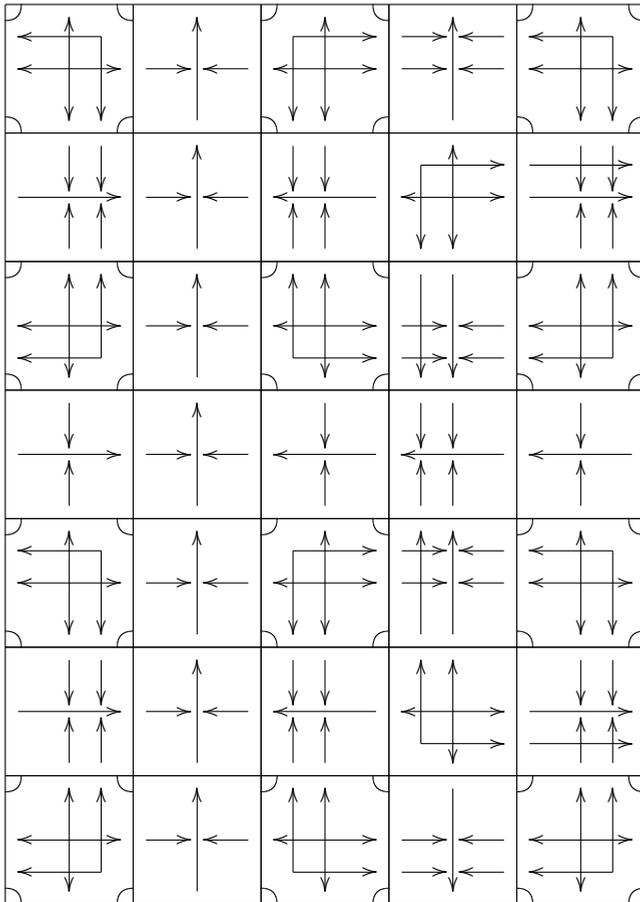


Para construir un bloque de 7×7 teselas, procedemos de manera análoga, es decir, replicamos el bloque de 3×3 teselas, elegimos un nuevo cruce sin cuernos como centro de la cruz que falta por cubrir y completamos de la única manera posible.

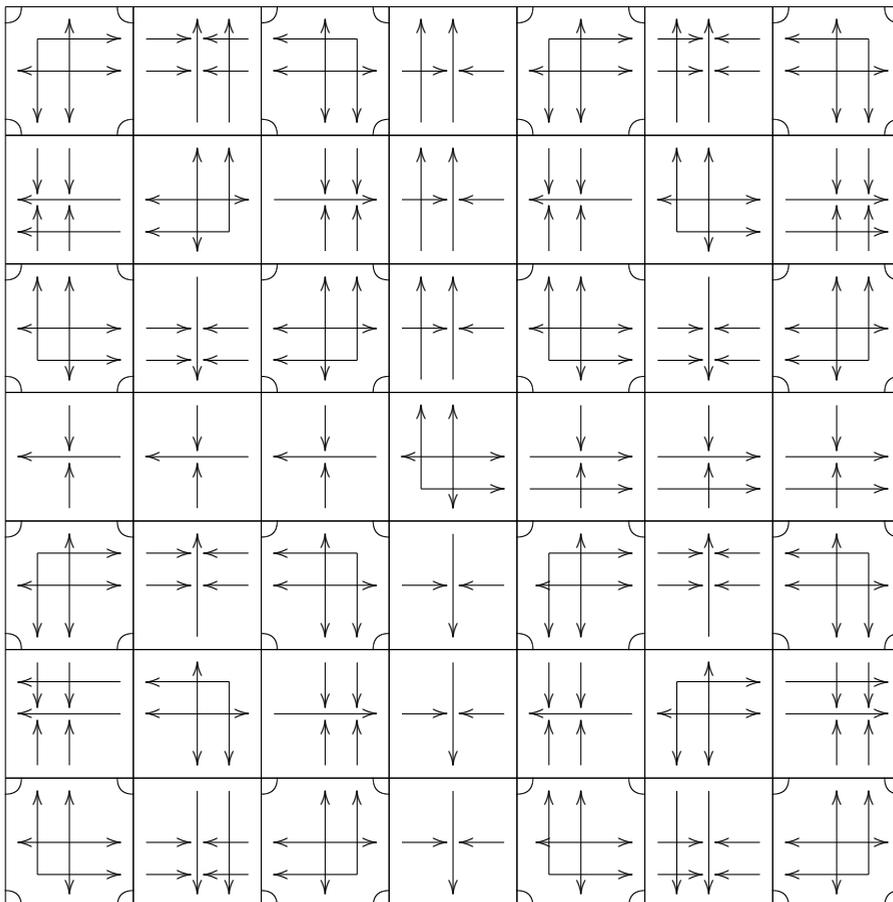


Hemos descrito un proceso de construcción de bloques de $(2^{n+1} - 1) \times (2^{n+1} - 1)$ teselas a partir de bloques de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas, replicándolos mediante giros de 90, 180 y 270 grados, eligiendo cruces sin cuernos como centro de los nuevos bloques y completándolos de la única manera posible.

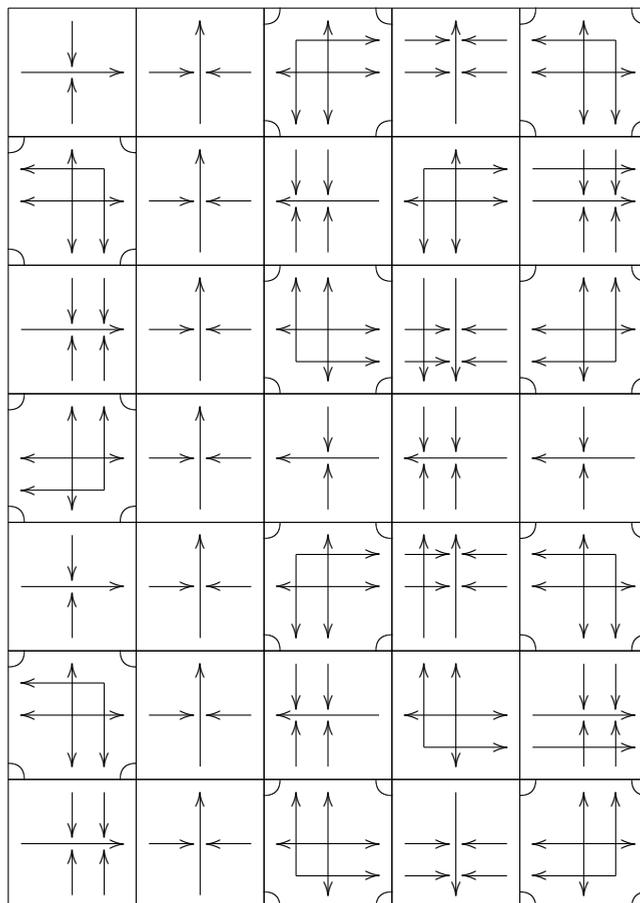
Hay que observar que la elección de los cruces centrales determina la región del plano que se tesela. Por ejemplo, si todos los cruces tienen la misma orientación, teselamos un cuarto de plano. Si fijamos una dirección (por ejemplo, hacia la derecha) y alternamos las otras dos (por ejemplo, hacia arriba y hacia abajo), teselamos un semiplano (derecho). Pero si alternamos tres o cuatro orientaciones de manera indefinida, tenemos un plano completo. Sin embargo, no es necesario proceder siempre así para lograr teselar el plano. Podemos replicar un semiplano y después pegar el original y la réplica usando filas o columnas infinitas de teselas de tipo (d) o (f).



También podemos replicar un cuarto de plano y pegar las copias resultantes mediante una cruz infinita. Como en el caso de los bloques finitos, estas cruces infinitas están completamente determinadas por la elección de los cruces sin cuernos centrales.



Por otra parte, los pegados no tienen por qué ser forzosamente simétricos, sino que pueden aparecer “fallas” (véase la siguiente figura), lo que suprime el carácter repetitivo y da lugar a un tipo diferente de mosaicos. Luego debemos distinguir el conjunto \mathfrak{T} de todos los mosaicos de Robinson del subconjunto \mathfrak{R} de los mosaicos construidos de manera repetitiva, es decir, la unión de los conjuntos \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 y \mathfrak{R}_4 formados por los mosaicos construidos sin pegado, por réplica y pegado de semiplanos y por réplica y pegado de cuartos de plano respectivamente.



Si identificamos cada una de las cuatro orientaciones que puede adoptar un cruce sin cuernos con una pareja de elementos del conjunto $\{0, 1\}$ y recordamos que los bloques de $(2^{n+1} - 1) \times (2^{n+1} - 1)$ teselas sólo dependen del cruce central, tenemos una correspondencia entre el conjunto de sucesiones $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y el conjunto \mathfrak{R} . En principio, sabemos que cada sucesión $\alpha = \{\alpha_n\} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ determina una sucesión de bloques. Cuando la unión de los bloques es igual al plano, la sucesión determina un mosaico de \mathfrak{R}_1 . Para asociarle un mosaico de \mathfrak{R}_4 a una sucesión periódica con período 00, 01, 11 ó 10, debemos replicar el cuarto de plano obtenido como unión de bloques y añadir una cruz infinita con cruce central correspondiente al período. Si la sucesión contiene dos parejas de elementos de $\{0, 1\}$ con sumas de distinta paridad, repetidas una infinidad de veces, pero las otras dos parejas sólo aparecen un número finito de veces, obtenemos un mosaico de \mathfrak{R}_2 añadiendo un corredor infinito formado por teselas de tipo (f). Estas apuntan hacia arriba (abajo) si la unión de los bloques es

el semiplano derecho (izquierdo) y a la derecha (izquierda) si es el semiplano superior (inferior). Luego tenemos una aplicación inyectiva $\Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathfrak{R}$.

4.2. Espacios de los mosaicos de Robinson

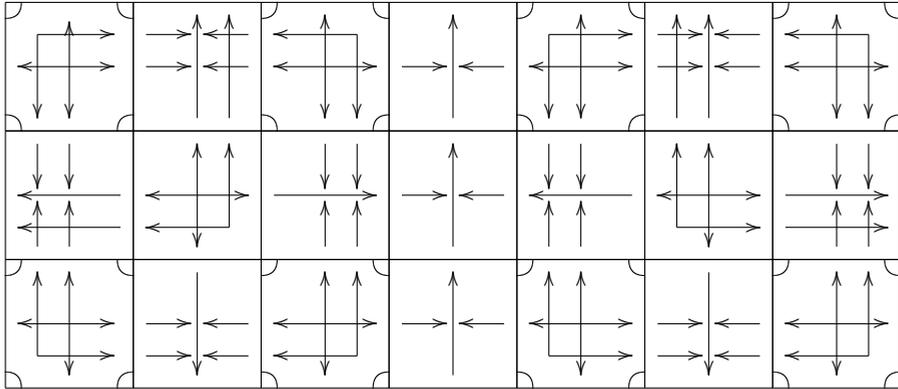
Sea \mathcal{P} el conjunto de las seis prototeselas de Robinson y sus imágenes por los giros de 90, 180 y 270 grados y la reflexión respecto del eje de ordenadas. Llamamos *espacio de los mosaicos de Robinson* al espacio foliado $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Aunque este espacio podría contener en principio algún mosaico diferente de los descritos, puede verse sin dificultad que no hay ninguna regla de construcción distinta a la empleada en el párrafo anterior. En otros términos, el espacio de los mosaicos de Robinson $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ se reduce al subespacio \mathfrak{T} obtenido mediante esa regla. Ahora tenemos:

Proposición 4.1. *El conjunto de las prototeselas de Robinson \mathcal{P} es aperiódico, es decir, cualquier mosaico de Robinson $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}$ es aperiódico.*

Demostración. Si una traslación deja invariante un mosaico de \mathfrak{T} , entonces la imagen de cada bloque de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas es un bloque del mismo tamaño. Luego la norma del vector de traslación es mayor o igual que la distancia mínima entre los cruces centrales de dos bloques de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas. Pero como el tamaño de los bloques es arbitrariamente grande, esto resulta imposible. \square

Proposición 4.2. *El conjunto \mathfrak{R} está formado por los mosaicos repetitivos de \mathfrak{T} .*

Demostración. Empezamos mostrando que los elementos de \mathfrak{R} son repetitivos. Como cualquier mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{R}_1$ es la unión de una sucesión exhaustiva y creciente de bloques, en este caso nos basta comprobar que, para cualquiera de estos bloques, existe una constante $R > 0$ tal que cualquier bola de radio R contiene una copia por traslación del bloque. En efecto, cualquier bola de radio $R = 2^{n+1}\sqrt{2}$ contiene una copia por traslación de cualquier bloque de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas. Si $\mathcal{T} \in \mathfrak{R}_4$, el mosaico sigue siendo la unión de una sucesión de bloques de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas, centrados en el cruce de la cruz infinita, y podemos aplicar el mismo argumento de antes. Por último, si $\mathcal{T} \in \mathfrak{R}_2$, entonces no podemos describir el plano como unión de bloques, pero sí de rectángulos formados por pequeñas filas o columnas de $(2^n - 1)$ teselas (idénticas a la fila o la columna infinita) y dos bloques de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas situados a ambos lados (véase la siguiente figura). Si tomamos $R = 2^{n+3}\sqrt{2}$, entonces cualquier bola de radio R contiene una copia por traslación del rectángulo y concluimos de igual manera.



Recíprocamente, ninguno de los mosaicos de $\mathfrak{T} - \mathfrak{R}$ es repetitivo, ya que el pegado asimétrico de semiplanos y cuartos de plano suprime ese carácter. \square

Teorema 4.3. *El espacio de los mosaicos de Robinson aperiódicos y repetitivos \mathfrak{R} es el único subconjunto minimal del espacio foliado \mathfrak{T} de los mosaicos de Robinson. En particular, \mathfrak{R} es la envoltura de cualquier mosaico aperiódico y repetitivo.*

Demostración. Como consecuencia de los resultados anteriores, nos basta comprobar que $\Omega_{\mathcal{T}} = \mathfrak{R}$ para cada $\mathcal{T} \in \mathfrak{R}$. El criterio de minimalidad 3.10 implica que $\Omega_{\mathcal{T}} \subset \mathfrak{R}$. Ahora bien, cualquier mosaico \mathcal{T}' de \mathfrak{R} es unión de motivos cuadrados o rectangulares que también podemos encontrar en \mathcal{T} . Luego \mathcal{T}' es aproximado por elementos de la órbita de \mathcal{T} . \square

4.3. Dinámica transversa

Como resultado de la descripción de los mosaicos de Robinson, hemos obtenido una aplicación inyectiva $\Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathfrak{R}$. De hecho, una vez fijado un punto base en cada prototilesa, la imagen de Φ está contenida en el conjunto Σ formado por los mosaicos para los que el origen del plano coincide con el punto base de algún cruce sin cuernos. Se trata de una transversal completa del espacio foliado \mathfrak{T} . Por consiguiente, tenemos realmente una aplicación inyectiva

$$\Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathfrak{R} \cap \Sigma.$$

Esta aplicación es sobreyectiva cuando nos restringimos a $\mathfrak{R}_1 \cap \Sigma$, pero no ocurre lo mismo con $\mathfrak{R}_2 \cap \Sigma$ y $\mathfrak{R}_4 \cap \Sigma$. Veamos que Φ nos proporciona una codificación de las hojas del espacio foliado \mathfrak{R} :

Proposición 4.4. *Dos mosaicos codificados $\Phi(\alpha)$ y $\Phi(\beta)$ pertenecen a la misma órbita si y sólo si los códigos α y β son cofinales, i.e. existe $n \geq 0$ tal que $\alpha_i = \beta_i$ para cada $i \geq n$.*

Demostración. Supongamos que α y β son cofinales, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_i = \beta_i$ para cada $i \geq n$. También podemos suponer que n es par. Ahora cada par de códigos $\alpha_i \alpha_{i+1}$ (con $0 \leq i < n$ par) corresponde al cruce central de un bloque de $(2^{i+1} - 1) \times (2^{i+1} - 1)$ teselas de $\Phi(\alpha)$. El cruce central de cualquier otro bloque de $(2^{i+1} - 1) \times (2^{i+1} - 1)$ teselas (codificado por $\beta_i \beta_{i+1}$) se obtiene a partir del primero mediante traslación por un vector v_i . Las sucesiones de códigos $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ y $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ determinan bloques de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas relacionados por

$$\Phi(\beta_0, \dots, \beta_{n-1}) = \Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) + v$$

donde $v = v_0 + v_2 + \dots + v_{n-2}$. Teniendo en cuenta la hipótesis de partida, deducimos que $\Phi(\beta) = \Phi(\alpha) + v$.

Para probar el recíproco, razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\Phi(\beta) = \Phi(\alpha) + v$, pero hay una sucesión de enteros m_n tales que $m_n \geq n$ y $\alpha_{m_n} \neq \beta_{m_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Fijemos un entero n suficientemente grande para que los bloques $\Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_{m_n})$ y $\Phi(\beta_0, \dots, \beta_{m_n})$ verifiquen que:

$$\Phi(\beta_0, \dots, \beta_{m_n}) = \Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_{m_n}) + v.$$

Por otra parte, si $w = w_0 + \dots + w_{m_n-1}$ es el vector construido antes, entonces:

$$\Phi(\beta_0, \dots, \beta_{m_n}) = \Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_{m_n}) + w.$$

Luego $v = w$, pero esto implicaría que $\|v\| \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. \square

Si \mathcal{R} denota la relación de equivalencia inducida por el espacio foliado \mathfrak{X} sobre $\mathfrak{X} \cap \Sigma$, el resultado anterior muestra que \mathcal{R} es isomorfa a la relación cofinal \mathcal{R}_{cof} en restricción a $\mathfrak{X}_1 \cap \Sigma$. Esto sugiere que la dinámica transversa de \mathfrak{X} puede describirse por medio de \mathcal{R}_{cof} . Antes de precisar el sentido de esta afirmación, debemos recordar algunas interpretaciones usuales del conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y la relación \mathcal{R}_{cof} . Empezamos dotando a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de la topología producto, generada por los cilindros $C_{\beta_0, \dots, \beta_n}^{i_0, \dots, i_n} = \{\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} / \alpha_{i_0} = \beta_0, \dots, \alpha_{i_n} = \beta_n\}$ donde $i_j \in \mathbb{N}$ y $\beta_j \in \{0, 1\}$.

Definición 4.5. Llamamos *máquina de sumar binaria* al sistema dinámico generado por la transformación $T : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definida por:

i) si $\alpha_0 = 0$, entonces $T(\alpha)_0 = 1$ y $T(\alpha)_n = \alpha_n$ para cada $n \geq 1$,

ii) si $\alpha_0 = 1$, entonces $T(\alpha)_0 = 0$ y $T(\alpha)_1 = T(\sigma(\alpha))_0$,

donde $\sigma(\alpha)_n = \alpha_{n+1}$ para cada $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

La transformación T es conjugada a la transformación

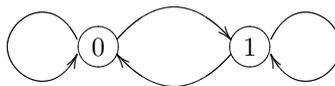
$$S : x \in \mathbb{Z}_2 \mapsto x + 1 \in \mathbb{Z}_2$$

definida sobre el anillo de los enteros 2-ádicos \mathbb{Z}_2 . Salvo las clases de cofinalidad de las sucesiones $000\dots$ y $111\dots$, que pertenecen a la misma órbita de T , todas las restantes clases de cofinalidad coinciden con las órbitas de T . Esto significa que la relación cofinal no es isomorfa a la relación de equivalencia definida por T , pero ambas satisfacen la primera de las siguientes definiciones (que corresponden a versiones borelianas de las definiciones habituales relativas a medidas, válidas en el contexto topológico):

Definición 4.6. Diremos que dos relaciones de equivalencia medibles y discretas \mathcal{R} y \mathcal{R}' (véase [FM]) definidas sobre dos espacios topológicos polacos X y X' son:

- i) *orbitalmente equivalentes* si X y X' contienen subconjuntos G_δ densos Y e Y' , saturados por \mathcal{R} y \mathcal{R}' , para los que existe un isomorfismo boreliano $\varphi : Y \rightarrow Y'$ compatible con \mathcal{R} y \mathcal{R}' , i.e. $\varphi(\mathcal{R}[x]) = \mathcal{R}'[\varphi(x)]$ para cada $x \in Y$.
- ii) *orbitalmente establemente equivalentes* si X y X' contienen subconjuntos borelianos Y e Y' cuyas saturaciones por \mathcal{R} y \mathcal{R}' son conjuntos G_δ densos para los que existe un isomorfismo boreliano $\varphi : Y \rightarrow Y'$ compatible con las relaciones de equivalencia inducidas por \mathcal{R} y \mathcal{R}' .

Por otra parte, podemos identificar la máquina de sumar binaria con el siguiente autómata celular (véase [GNS]):



Para poder describir la dinámica transversa del espacio foliado \mathfrak{R} , debemos precisar qué propiedades tiene la aplicación de codificación Φ . Ante todo, notemos que Φ no es continua, ya que las sucesiones

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \widehat{001101} \\
 \alpha_2 &= \widehat{00001101} \\
 \alpha_3 &= \widehat{0000001101} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

convergen a la sucesión periódica de período 00 , pero sus imágenes no convergen al mosaico $\Phi(\widehat{00})$, sino a $\Phi(\widehat{01})$. No obstante, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.7 ([GSeq]). *La aplicación $\Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow Im \Phi$ es boreliana y abierta.*

Luego estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.8 ([GSeq]). *La dinámica boreliana del espacio de los mosaicos de Robinson repetitivos \mathfrak{R} está representada por una máquina de sumar binaria, es decir, hay una equivalencia orbital estable entre la suma de 1 en los enteros 2-ádicos y la relación de equivalencia inducida sobre $\mathfrak{R} \cap \Sigma$.*

La prueba combina las proposiciones 4.4 y 4.7 con el siguiente resultado:

Proposición 4.9 ([GSeq]). *El espacio foliado \mathfrak{R} posee:*

- i) una infinidad no numerable de hojas planas, dotadas de mosaicos obtenidos como unión de bloques, que forman un conjunto residual;*
- ii) una infinidad no numerable de hojas planas, dotadas de mosaicos obtenidos por réplica y pegado de semiplanos, que forman un conjunto magro;*
- iii) cuatro hojas planas especiales, dotadas de mosaicos obtenidos por réplica y pegado de cuartos de plano.*

Estos resultados admiten versiones relativas a una medida invariante. Dada una relación de equivalencia medible y discreta \mathcal{R} definida sobre un espacio boreliano estándar X , se llama *transformación parcial de \mathcal{R}* a cualquier isomorfismo boreliano $T : A \rightarrow A'$ entre borelianos A y A' de X cuyo grafo $\{(x, y) \in X \times X / y = T(x)\}$ esté contenido en \mathcal{R} . Una medida boreliana μ sobre X se dice *invariante por \mathcal{R}* si $T_*\mu(B') = \mu(T^{-1}(B')) = \mu(B')$ para cada transformación parcial $T : A \rightarrow A'$ y cada boreliano $B' \subset A'$. El siguiente resultado explicita el tipo de relación considerado (respecto de la clasificación de las relaciones de equivalencia ergódicas establecida por F. J. Murray y J. von Neumann):

Teorema 4.10. *La relación de equivalencia \mathcal{R} inducida por el espacio foliado \mathfrak{R} sobre $\mathfrak{R} \cap \Sigma$ es de tipo II_1 , es decir, posee una medida de probabilidad invariante.*

Demostración. Para demostrar el teorema, aplicamos el método habitual de construcción de medidas invariantes por medio de sucesiones de Følner (véase [GP]). Dado un mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{R} \cap \Sigma$, cada motivo cuadrado B_n centrado en el origen y de lado $2n + 1$ determina un conjunto $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{R} \cap \Sigma$, que está formado por los trasladados de \mathcal{T} por los puntos base de B_n . Si μ_n es la distribución uniforme sobre \mathfrak{B}_n y M es un motivo de \mathcal{T} , entonces:

$$\mu_n(\mathfrak{B}_M) = \frac{\#\mathfrak{B}_M \cap \mathfrak{B}_n}{\#\mathfrak{B}_n} = \frac{A(M, n)}{V(n)}$$

donde $A(M, n)$ es el número de copias por traslación del motivo M que están contenidas en B_n y $V(n) = (2n + 1)^2$ es el número de teselas contenidas en B_n . Por compacidad, extrayendo una subsucesión si fuese necesario, podemos suponer que las medidas de probabilidad μ_n convergen débilmente a una medida de probabilidad μ . Luego

$$\mu(\mathfrak{B}_M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathfrak{B}_M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(M, n)}{V(n)}$$

es la *tasa de aparición del motivo* M . Por fin, como la función de volumen $V(n)$ tiene crecimiento subexponencial (de hecho, cuadrático), la medida μ es invariante (véase [GP]). \square

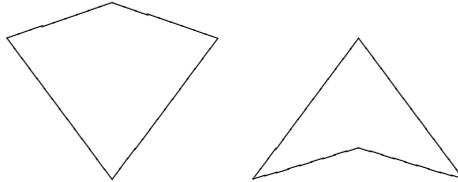
Ahora podemos enunciar una versión medible del teorema 4.8:

Teorema 4.11 ([GSeq]). *La dinámica medible de \mathfrak{R} está representada por una máquina de sumar binaria, es decir, hay una equivalencia orbital estable entre la suma de 1 en los enteros 2-ádicos y la relación de equivalencia inducida sobre $\mathfrak{R} \cap \Sigma$, dotadas de sendas medidas invariantes. En particular, el espacio foliado \mathfrak{R} posee:*

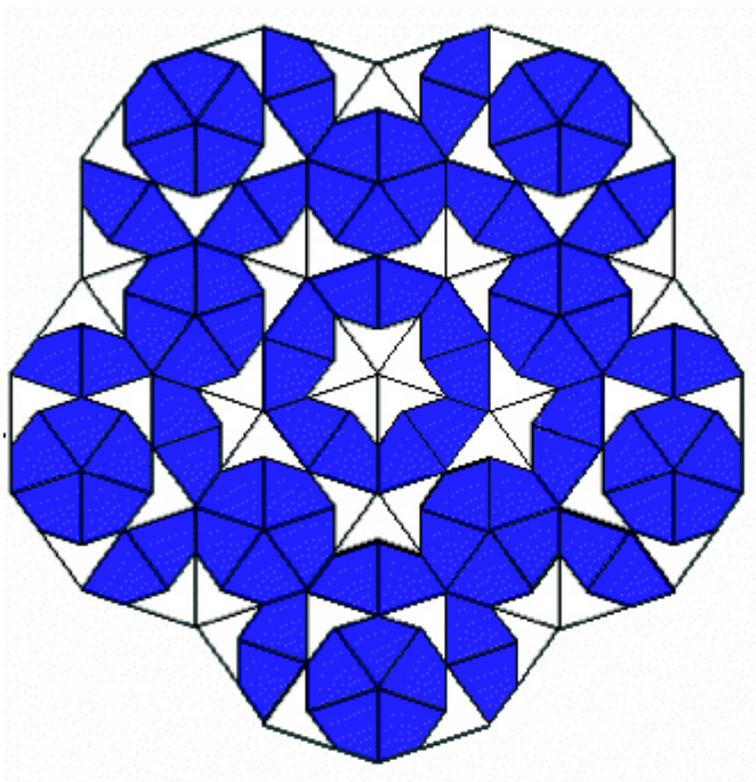
- i) una infinidad no numerable de hojas planas, dotadas de mosaicos obtenidos como unión de bloques, que forman un conjunto de medida total;*
- ii) una infinidad no numerable de hojas planas, dotadas de mosaicos obtenidos por réplica y pegado de semiplanos, que forman un conjunto de medida nula;*
- iii) cuatro hojas planas especiales, dotadas de mosaicos obtenidos por réplica y pegado de cuartos de plano.*

Corolario 4.12. *El espacio foliado \mathfrak{R} es únicamente ergódico.* \square

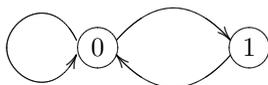
Terminamos con una observación a modo de conclusión. Como hemos indicado en la introducción, la flecha y la cometa son las prototeselas de los mosaicos aperiódicos más célebres, descritos por R. Penrose en [P].



Pese a la abundante literatura sobre los diferentes tipos de patrones locales y otras curiosidades, es una idea de R. M. Robinson (que puede verse en [GS]) la que permite construir de manera explícita estos mosaicos y describir su dinámica global.



Un estudio similar al desarrollado para los mosaicos de Robinson muestra que la dinámica del espacio foliado de los mosaicos de Penrose está representada por otro autómata celular:



No obstante, se trata de la dinámica medible y no topológica como se afirma en [Co]. Como antes, hay una infinidad no numerable de mosaicos aperiódicos y repetitivos, que representan clases de traslación distintas y son invariantes por rotaciones de ángulo π ó $\pi/5$. Estos mosaicos y sus trasladados forman un conjunto magro de medida nula. En general, según se prueba en [AG], la dinámica medible de cualquier mosaico del plano euclidiano está representada por un autómata celular.

Referencias

- [AG] F. Alcalde Cuesta y P. González Sequeiros, *Dynamique des pavages*. En preparación.

- [ALM] F. Alcalde Cuesta, A. Lozano Rojo y M. Macho Stadler, Dynamique et géométrie no commutative de la lamination de Ghys-Kenyon. Preprint, 2006.
- [BBG] J. Bellissard, R. Benedetti y J.M. Gambaudo, Spaces of Tilings, Finite Telescopic Approximations and Gap-Labeling. *Comm. Math. Phys.*, **261** (2006), 1–41.
Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labeling. (English summary) *Comm. Math. Phys.*
- [BHZ] J. Bellissard, D. Hermmann y M. Zarrouati, Hull of Aperiodic Solids and Gap Labeling Theorems, en *Directions in Mathematical Quasicrystals*, CRM Monograph Series **13**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2000, 207-259.
- [B] E. Blanc, *Propriétés génériques des Laminations*, Thèse UCB-Lyon 1, 2001.
- [Co] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, San Diego, 1994.
- [FM] J. Feldman y C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology and Von Neumann algebras, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **234** (1977), 289–324.
- [Gh] E. Ghys, Laminations par surfaces de Riemann. *Panoramas et Synthèses*, **8** (1999), 49-95.
- [GSeq] P. González Sequeiros, *A dinámica dos mosaicos de Robinson*. Tesiña de Licenciatura, Universidade de Santiago de Compostela, 2006.
- [GP] S.E. Goodman y J.F. Plante, Holonomy and averaging in foliated sets. *J. Differential Geometry*, **14** (1979), 401–407.
- [GNS] R. I. Grigorchuk, V. V. Nekrashevich y V. I. Sushchanskii, Automata, dynamical systems, and groups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, **231** (2000), 128-203.
- [GS] B. Grünbaum y G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman & Co., New York, 1987.
- [H] G. Hector, Feuilletages en cylindres, en *Geometry and Topology*. Springer L.N. in Math., **597** (1977), 252-270.
- [K] J. Kellendonk, The local structure of tilings and their integer group of coinvariants. *Commun. Math. Phys.*, **187** (1997), 115–157.
- [KP] J. Kellendonk y I.F. Putnam, Tilings, \mathbb{C}^* -algebras and K-theory, en *Directions in Mathematical Quasicrystals*, CRM Monograph Series **13**, American Mathematical Society, 2000, 177–206.

- [LP] J. C. Lagarias y P. A. B. Pleasants, Repetitive Delone sets and quasi-crystals. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23** (2003), 831–867.
- [LR] A. Lozano Rojo, The dynamics of the Ghys-Kenyon lamination, in *Foliations*. Łodz, 2005.
- [P] R. Penrose, The role of aesthetics in pure and applied mathematical research. *Bull. Inst. Math. Appl.*, **10** (1974), 266–271.
- [R] C. Radin, *Miles of tiles*. Student Math. Library, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1999.
- [RW] C. Radin y M. Wolff, Space tilings and local isomorphism, *Geom. Dedicata*, **42** (1992), 355–360.
- [Ro] R. M. Robinson, Undecidability and Nonperiodicity of Tilings of the Plane. *Inventiones Math.*, **12** (1971), 177–209.
- [S] B. Solomyak, Dynamics of self-similar tilings, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **17** (1997), 695–738.

Dpto. Xeometría e Topoloxía
Universidade de Santiago de Compostela
15782 Santiago de Compostela

Trabajo financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología BFM2002-04439-C01 y el Ministerio de Educación y Ciencia MTM2004-08214.

DINÁMICA DE DIFEOMORFISMOS DICRÍTICOS EN $(\mathbb{C}^n, 0)$

FABIO ENRIQUE BROCHERO MARTÍNEZ

RESUMEN. Dado $F : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ difeomorfismo analítico tangente a la identidad y dicrítico, con el origen como punto fijo aislado, mostraremos que existen dominios U^+ y U^- tales que U^+ es estable por F^+ y las órbitas positivas de todos los puntos de U^+ convergen al origen, y U^- es estable por F^- y las órbitas negativas de todos los puntos de U^- convergen al origen. Además mostraremos que $U^+ \cup U^-$ contiene todas las direcciones partiendo del origen salvo un número finito.

1. INTRODUCCIÓN

Un difeomorfismo analítico en $0 \in \mathbb{C}^n$ es una aplicación F definida en un entorno de 0 tal que $F(0) = 0$ y $DF(0)$ es invertible. Un germen de difeomorfismo analítico en $(\mathbb{C}^n, 0)$ es una clase de equivalencia de difeomorfismos analíticos en $0 \in \mathbb{C}^n$ dada por $F \sim G$ si y solamente si existe un entorno U de 0 con $F|_U = G|_U$. Denotaremos por $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ el conjunto de gérmenes de difeomorfismos analíticos y por $\text{Diff}_1(\mathbb{C}^n, 0)$ el subconjunto de elementos de $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ tangentes a la identidad, esto es, $F \in \text{Diff}_1(\mathbb{C}^n, 0)$ si $Df(0) = I$. Observemos que $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ y $\text{Diff}_1(\mathbb{C}^n, 0)$ son grupos con respecto a la composición, así es natural definir el conjunto de gérmenes de difeomorfismos F^{on} y analizar el posible comportamiento de las órbitas con punto inicial cercano a 0 .

Genéricamente, el comportamiento local de las órbitas de un elemento $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ depende de su parte lineal. De hecho, si $x \mapsto DF(0)x$ es una transformación lineal hiperbólica o, equivalentemente, si todos los autovalores de $DF(0)$ tienen módulo diferente de 1 , entonces el teorema de Hartman-Grobman nos garantiza que F es topológicamente conjugado con su parte lineal, esto es, existe un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi \circ F(x) = DF(0)\varphi(x)$, y en dicho caso el comportamiento topológico depende únicamente de la dimensión de las variedades estable e inestable; además, si el espectro de $DF(0)$ es no resonante, Sternberg probó que es posible encontrar una conjugación de clase C^∞ entre F y su parte lineal. En el caso en que $DF(0)$ cumple la condición de Brjuno, usando técnicas de pequeños divisores (ver por ejemplo [Ar]), tenemos además que F es conjugado analíticamente con su parte lineal.

Por el contrario, si $DF(0)$ no cumple la condición de Brjuno, la dinámica de las órbitas de F puede ser muy complicada, incluso en dimensión 1 . Por ejemplo, en [Yo] Yoccoz muestra que si $f(z) = \lambda(z + z^2)$ no es analíticamente linealizable entonces f posee órbitas periódicas de órdenes arbitrariamente grandes.

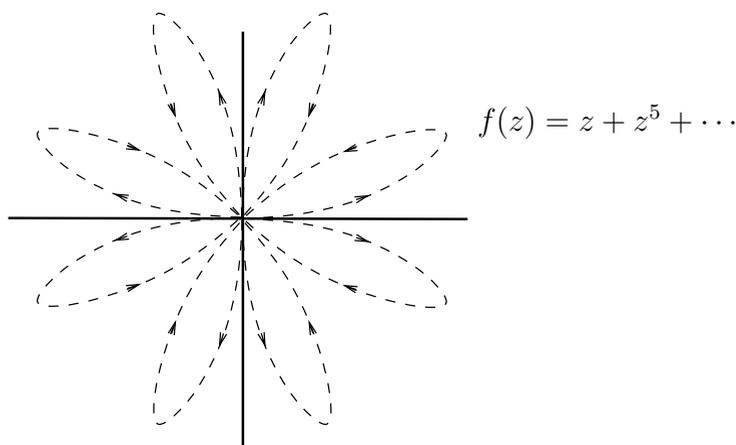
2000 *Mathematics Subject Classification.* 32H50, 58D05, 37Fxx.

El autor fue financiado por CAPES, Brasil, Proceso: BEX3083/05-5.

Por otra parte, el teorema de la flor de Leau y Fatou describe totalmente el comportamiento de las órbitas en dimensión uno cuando el difeomorfismo es tangente a la identidad. Específicamente, si $f(x) = x + ax^{k+1} + \dots$ con $a \neq 0$, existen k regiones disjuntas U_j^+ y k regiones disjuntas U_j^- tales que 0 está en la frontera de U_j^+ y U_j^- y

- a) $f(U_j^+) \subset U_j^+$ y $f^{-1}(U_j^-) \subset U_j^-$
- b) $f^{on}(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$ y $x \in U_j^+$
- c) $f^{on}(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow -\infty$ y $x \in U_j^-$
- d) $\bigcup_{j=1}^k \overline{(U_k^+ \cup U_k^-)}$ es un entorno de 0.

En la siguiente figura se ilustra el caso en que $k = 5$, en la que las órbitas convergen asintóticamente a 4 direcciones.



En general, las órbitas positivas convergentes a 0 se aproximan asintóticamente en el origen a las semirrectas $\{x | ax^k \in \mathbb{R}^+\}$ y las órbitas negativas convergentes a 0 se aproximan asintóticamente en el origen a las semirrectas $\{x | ax^k \in \mathbb{R}^-\}$.

Una posible generalización de dicho resultado fue encontrada por Hakim [H1, H2], introduciendo las nociones de dirección característica de un difeomorfismo tangente a la identidad y de curva parabólica o, en general, de cuenca de atracción. Una *dirección característica* $[v]$ de un difeomorfismo $F(x) = x + F_{k+1}(x) + \dots$ es un elemento del espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ tal que existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ con $F_{k+1}(v) = \lambda v$. Si $\lambda = 0$ decimos que la dirección característica $[v]$ es *degenerada*; si toda dirección es característica decimos que el difeomorfismo es *dicrítico*. Por otra parte, una *pieza de subvariedad* es un subconjunto S de \mathbb{C}^n tal que existe $U \subset \mathbb{C}^d$ abierto simplemente conexo con frontera de clase C^1 por partes, con 0 en la frontera de U y además existe una función analítica inyectiva $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$, que se extiende a la frontera de U de forma continua con $\varphi(\overline{U}) = \overline{S}$ y $\varphi(0) = 0$. Dicha pieza de variedad se llama *cuenca de atracción* de dimensión d de F si además cumple que $F(S) \subset S$ y para todo $x \in S$ tenemos que $F^{ok}(x) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. En el caso en que la dimensión de la cuenca es

1, se usa también el término *curva parabólica*. Así, el resultado de M. Hakim es el siguiente:

Teorema 1.1. Sean $F(z) = z + P_k(z) + \dots \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ y $[v]$ una dirección característica no degenerada de F . Supongamos que existen d autovalores de la aplicación lineal $w \mapsto DP_k(v) \cdot w$ que tienen parte real positiva. Entonces existe una cuenca de atracción de dimensión $d + 1$ para F , cuyas órbitas son atraídas en la dirección $[v]$.

Como caso particular de dicho resultado, tenemos que existen curvas parabólicas tangentes a toda dirección característica no degenerada. En el caso de dimensión dos, Abate [Ab] muestra la existencia de curvas parabólicas para todo difeomorfismo tangente a la identidad que tiene a 0 como punto fijo aislado.

El propósito de este artículo es mostrar el siguiente resultado:

Teorema 1.2. Sean $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ un difeomorfismo tangente a la identidad y dicrítico, $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ la explosión del origen y $\tilde{F} \in \text{Diff}(M, D)$ el levantamiento de F por la explosión. Entonces, existen un número finito de puntos $p_1, \dots, p_k \in D$ y abiertos $U^+, U^- \in M$ tales que:

1. $\overline{U^+ \cup U^-}$ es un entorno de $D \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$
2. $F(U^+) \subset U^+$ y para todo punto $q \in U^+$ tenemos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^{on}(q)$ existe y es un punto de D .
3. $F^{-1}(U^-) \subset U^-$ y para todo punto $q \in U^-$ tenemos que $\lim_{n \rightarrow -\infty} F^{on}(q)$ existe y es un punto de D .

2. ÓRBITAS CONVERGENTES

Antes de mostrar el teorema, veamos que ser dirección característica es una condición necesaria para la existencia de órbitas atractoras en dicha dirección.

Lema 2.1. Sea $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $F(z) = z + F_{k+1}(z) + \dots$ y $F_{k+1} \neq 0$. Sea $\{z_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que

1. $z_{l+1} = F(z_l)$,
2. $z_l \rightarrow 0$
3. $[z_l] \rightarrow [v] \in \mathbb{C}P(n - 1)$.

Entonces, para $1 \leq j \leq n$, $\frac{1}{l\pi_j(z_l)^k} \rightarrow -k\pi_j \left(F_{k+1} \left(\frac{v}{\pi_j(v)} \right) \right)$ (donde $\pi_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ representa la proyección sobre la j -ésima componente).

Demostración: Dado que las relaciones son simétricas con respecto a las coordenadas, basta mostrar el resultado para la primera proyección. Denotemos $F_{k+1} = (p(z), Q(z))$, donde $p(z)$ es un polinomio y Q es un vector $n - 1$ dimensional con coeficientes polinomiales. Haciendo una explosión en $0 \in \mathbb{C}^n$ y tomando la representación en la primera carta $x_j = x_1 v_j$, obtenemos el difeomorfismo

$$\tilde{F}(x_1, v) = \begin{pmatrix} x_1 + x_1^{k+1} p(1, v) + O(x_1^{k+2}) \\ v + x_1^k R(1, v) + O(x_1^{k+1}) \end{pmatrix}$$

donde $R(1, v) = Q(1, v) - p(1, v)v$. Denotando por $x_{1,l} = \pi_1(z_l)$ y $w_l = \frac{z_l}{x_{1,l}}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_{1,l+1}^k} &= \frac{1}{(x_{1,l} + x_{1,l}^{k+1}p(w_l) + O(x_{1,l}^{k+2}))^k} \\ &= \frac{1}{x_{1,l}^k} (1 + x_{1,l}^k p(w_l) + O(x_{1,l}^{k+1}))^{-k} \\ &= \frac{1}{x_{1,l}^k} - kp(w_l) + O(x_{1,l}). \end{aligned}$$

De la ecuación anterior se obtiene la suma telescópica

$$\frac{1}{x_{1,l}^k} - \frac{1}{x_{1,0}^k} = \sum_{j=1}^l \frac{1}{x_{1,j}^k} - \frac{1}{x_{1,j-1}^k} = - \sum_{j=1}^l (kp(w_{j-1}) + O(x_{1,j-1})).$$

Dividiendo por l y haciendo tender n a $+\infty$, deducimos que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{lx_{1,l}^k} = -k \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l kp(w_{j-1}) + \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l \frac{1}{l} O(x_{1,j-1}) = -kp\left(\frac{v}{v_1}\right),$$

donde en la última igualdad estamos usando que $p(w_{j-1}) \rightarrow p\left(\frac{v}{v_1}\right)$ y $x_{1,j} \rightarrow 0$ y así las sumas anteriores son sumas de Césaro. \square

Dado que $\frac{1}{l\pi_j(z_l)^k} \rightarrow -k\pi_j\left(F_{k+1}\left(\frac{v}{\pi_j(v)}\right)\right)$, multiplicando por $\pi_j(z_l)^{k+1}$ tenemos la relación $\frac{\pi_j(z_l)}{l} \rightarrow -k\pi_j(F_{k+1}(v))$. Sabemos que $[z_l] \rightarrow [v]$; así, a partir de la relación encontrada anteriormente obtenemos, proyectivizando, que

$$[z_l] = \left[\frac{1}{l} z_l \right] \rightarrow [-kF_{k+1}(v)] = [F_{k+1}(v)],$$

de donde se concluye que $[F_{k+1}(v)] = [v]$. Observemos que en el paso al límite estamos suponiendo de antemano que el límite en el espacio proyectivo existe, esto es, que la dirección característica es no degenerada, ya que en caso contrario se tiene trivialmente que $F_{k+1}(v) = 0 \cdot v$.

Demostración del teorema: Como el difeomorfismo es dicrítico, posee una representación en serie de potencias de la forma $F(z) = z + P(z)z + \dots$, donde $z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ y $P(z)$ es un polinomio homogéneo de grado $k \in \mathbb{N}^*$. Haciendo una explosión en el origen de \mathbb{C}^n y considerando el levantamiento del difeomorfismo en la carta $(x, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$, donde $x = \zeta_1$ y $\pi_j(v) = \frac{\zeta_l}{\zeta_1}$, $l = 2, 3, \dots, n$, se obtiene que

$$\tilde{F}(x, v) = \begin{pmatrix} x + x^{k+1}p(v) + \sum_{j=2}^{\infty} a_{k+j}(v)x^{k+j} \\ v + \sum_{j=1}^{\infty} B_{k+j}(v)x^{k+j} \end{pmatrix},$$

donde $p(v) = P(1, v)$, a_j es un polinomio de grado menor que $j + 2$ y B_{k+j} es un vector de dimensión $n - 1$ de polinomios de grado menor que $j - 2$. Sea q un

punto arbitrario en $D \setminus \{(1 : v) \in D \mid p(v) = 0\}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad, haciendo un cambio de variables lineal, que $q = (0, 0) \in \widehat{\mathbb{C}}^n$. Como \tilde{F} es holomorfa en alguna vecindad de $(0, 0)$, existen $r_1, r_2 > 0$ y constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$\| \sup_{|v| \leq r_1} a_j(v) \| \leq C_1 r_2^j, \text{ y } \| \sup_{|v| \leq r_1} B_j(v) \| \leq C_2 r_2^j \text{ para todo } j.$$

Haciendo el cambio de variables ramificado $w = \frac{1}{x^k}$, se sigue que

$$\bar{F}(w, v) = \begin{pmatrix} w - kp(v) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j(v) \frac{1}{w^{j/k}} \\ v + \sum_{j=1}^{\infty} B_{k+j}(v) \frac{1}{w^{1+j/k}} \end{pmatrix}$$

es holomorfa en $\{(w, v) \in \mathbb{C}_k \times \mathbb{C}^{n-1} \mid |v| < r_1, |w| > r_2^k\}$, donde \mathbb{C}_k es un cubrimiento de k -hojas de \mathbb{C}^* . En particular, existen $C_3, C_4 > 0$ tales que

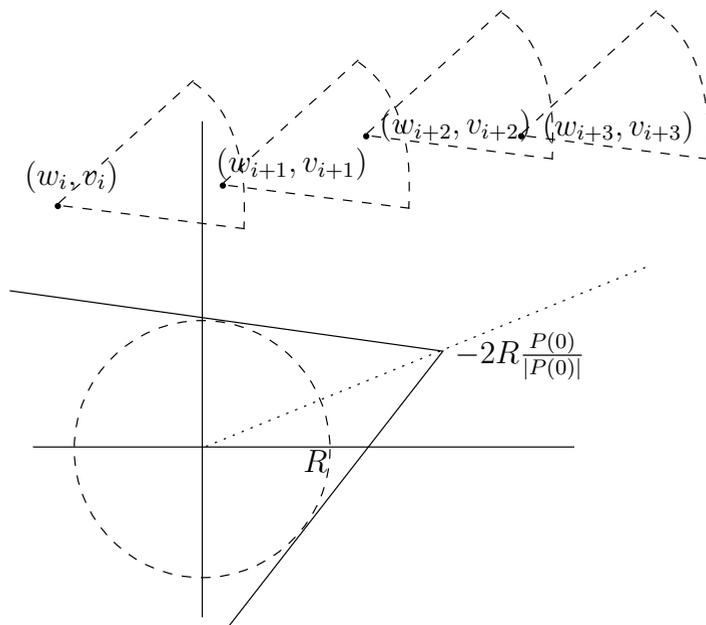
$$\| \sup_{|v| \leq r_1} c_j(v) \| \leq C_3 r_2^j \text{ para todo } j \text{ y } \left| \sum_{j=1}^{\infty} B_{k+j}(v) \frac{1}{w^{1+j/k}} \right| < \frac{C_4}{|w|^{1+1/k}}.$$

Escogiendo $r_1 > r > 0$ con $\left| \frac{p(v)}{p(0)} - 1 \right| < \frac{1}{4}$ para todo $|v| < r$, y R suficientemente grande; su valor será determinado posteriormente.

Fijando dichas constantes, definimos dominios de tal forma que los puntos de tales dominios cumplen que la primera coordenada esté a distancia mayor que R y que en tal coordenada el dominio sea estable com respecto a traslaciones de la forma $ae^{i\theta}$ con $a > 0$ e $|\theta| < \frac{\pi}{6}$. Explícitamente, definimos

$$V_q^+(a) = \left\{ (w, v) \in \mathbb{C}_k \times \mathbb{C} \mid |v| < a, \left| \arg \left(-\frac{w}{p(0)} - \frac{2R}{|p(0)|} \right) \right| < \frac{5\pi}{6} \right\},$$

donde \arg es definido de \mathbb{C}_k^* para $(-\pi, \pi]$. Como se ve en la figura, el dominio así construido cumple que $V_q^+(r) \subset \{(w, v) \in \mathbb{C}_k \times \mathbb{C} \mid |v| < r, |w| > R\}$.



Ahora se define la sucesión de iteraciones $(w_{j+1}, v_{j+1}) = \bar{F}(w_j, v_j)$. Afirmamos que existe un $R \gg 0$ que depende de r tal que para todo $p = (w_0, v_0) \in V_q^+(\frac{r}{2})$ tenemos que

1. $\bar{F}^j(p) = (w_j, v_j) \in V_q^+(r)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.
2. La sucesión $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge.
3. $|w_j| \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow +\infty$.

Observemos que esta primera condición garantiza que las órbitas no escapan de un dominio determinado que depende del dominio inicial y las otras condiciones garantizan la convergencia de las órbitas a 0.

Prueba de la afirmación: Para un punto arbitrario (w, v) en $V_q^+(r)$ tenemos que

$$\begin{aligned} |w_1 - (w - kp(0))| &\leq \left| k(p(0) - p(v)) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j(v) \frac{1}{w^{\frac{j}{k}}} \right| \\ &\leq k|p(0) - p(v)| + \sum_{j=1}^{\infty} C_3 \frac{r_2^j}{|w|^{\frac{j}{k}}} < k \frac{|p(0)|}{4} + C_3 \frac{r_2}{|w|^{\frac{1}{k}} - r_2} \end{aligned}$$

Así, escogiendo $R > r_2^k \left(\frac{4C_3}{k|p(0)|} + 1 \right)^k$ tenemos que

$$|w_1 - (w - kp(0))| < k \frac{|p(0)|}{4} + C_3 \frac{r_2}{r_2 \left(\frac{4C_3}{k|p(0)|} + 1 \right) - r_2} = k \frac{|p(0)|}{2}.$$

Sea $p = (w_0, v_0) \in V_q^+(\frac{r}{2})$ y supongamos que $(w_i, v_i) \in V_q^+(r)$ para $0 \leq i \leq j - 1$. Entonces

$$|w_j - (w_0 - jkp(0))| = \left| \sum_{i=1}^j w_i - (w_{i-1} - kp(0)) \right| \leq \sum_{i=1}^j |w_i - (w_{i-1} - kp(0))| < jk \frac{|p(0)|}{2},$$

así $w_j = w_0 - jkp(0)(1 + \delta_j)$ donde $|\delta_j| < \frac{1}{2}$, y

$$-\frac{w_j}{p(0)} - \frac{2R}{|p(0)|} = -\frac{w_0}{p(0)} - \frac{2R}{|p(0)|} + jk(1 + \delta_j),$$

Dado que $|\arg(1 + \delta_j)| < \frac{\pi}{6}$ se sigue que $|\arg(-\frac{w_j}{p(0)} - \frac{2R}{|p(0)|})| < \frac{5\pi}{6}$. Ahora observemos que $|v_i| < |v_{i-1}| + \frac{C_4}{|w_{i-1}|^{1+\frac{1}{k}}}$ para todo $i = 1, \dots, j$, y por consiguiente $|v_j| < |v_0| + \sum_{i=1}^j \frac{C_4}{|w_{i-1}|^{1+\frac{1}{k}}}$, así

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j \frac{1}{|w_{i-1}|^{1+\frac{1}{k}}} &< \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(R^2 + (\frac{ik|p(0)|}{2})^2)^{\frac{k+1}{2k}}} \\ &< \frac{1}{R^{1+\frac{1}{k}}} + 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{(R^2 + (\frac{k|p(0)|}{2})^2 x^2)^{\frac{k+1}{2k}}} dx \\ &< \frac{1}{R^{\frac{1}{k}}} + \frac{4}{k|p(0)|R^{\frac{1}{k}}} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{k+1}{2k}}} dx \end{aligned}$$

de donde, escogiendo $R > \max \left\{ \frac{(2C_4)^k}{r^k} \left(1 + \frac{4C(k)}{k|p(0)|}\right)^k, 1 \right\}$, donde $C(k) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{k+1}{2k}}} dx < k + 1$, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^j \frac{1}{|w_{i-1}|^{1+\frac{1}{k}}} < \frac{r}{2C_4},$$

por lo que tenemos que $|v_j| < r$, y se concluye que $(w_j, v_j) \in V_q^+(r)$. Ahora tenemos que $|w_j| = |w_0 - jkp(0)(1 + \delta_j)| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, ya que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_4}{|w_i|^{1+\frac{1}{k}}}$ es una serie de Cauchy.

De la misma forma podemos obtener un abierto V_q^- cambiando en la prueba el difeomorfismo F por F^{-1} . Finalmente, definimos los abiertos $U^+ = \bigcup V_q^+$ y $U^- = \bigcup V_q^-$ donde $q \in D \setminus \{(1 : v) \in D | p(1, v) = 0\}$, que son los abiertos que cumplen las hipótesis del teorema. \square

REFERENCIAS

- [Ab] M. Abate. *The residual index and the dynamics of holomorphic maps tangent to the identity*. Duke Math. J. 107 (2001), no. 1, 173–207.
- [Ar] V. Arnold. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Mir, 1980.

- [Ca] C. Camacho. *On the structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in C^2* . Astérisque 59-60 (1978), 83–94.
- [CM] D. Cerveau, R. Moussu. *Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ et équations différentielles $ydy + \dots = 0$* . Bull. Soc. Math. France 116 (1988), no.4, 459–488.
- [H1] M. Hakim. *Analytic transformations of $(\mathbb{C}^p, 0)$ tangent to the identity*. Duke Math. J. 92 (1998), 403–428.
- [H2] M. Hakim, *Transformations tangent to the identity, Stable pieces of manifolds*. Prepublicación.
- [MR] J. Martinet, J.P Ramis. *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*. Ann. Sci. École Norm. Sup. 16 (1983), no. 4, 571–621.
- [Vo] S.M. Voronin. *Analytic classification of germs of conformal mappings $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$* . Funktsional. Anal. i Prilozhen 15 (1981), no. 1, 1–17.
- [Yo] J.C. Yoccoz. *Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques*, Astérisque 231 (1995), 3–88.

Departamento de Matemática
Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte, MG
CEP 30123-970
Brasil
email: fbrocher@mat.ufmg.br

Dicriticidad de foliaciones holomorfas de codimensión uno

Felipe Cano

IMPA. Noviembre 2007

A Alcides

En estas notas ¹ actualizaremos el concepto de *dicriticidad* para gérmenes de foliaciones holomorfas singulares de codimensión uno, en un espacio ambiente de dimensión tres. Este concepto ha sido estudiado en [Ca1] y utilizado en [CaCe]. La existencia de una reducción de singularidades, en dimensión tres, para foliaciones de codimensión uno, probada en [Ca2], permite una aproximación más simple al concepto de dicriticidad.

El caso de dimensión ambiente igual a dos Sea \mathcal{F} un germen de foliación holomorfa singular sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$, que está dada por $\omega = 0$, donde $\omega = b(x, y)dx - a(x, y)dy$. Decimos que \mathcal{F} es *dicrítica* si tiene una infinidad de gérmenes de curvas analíticas invariantes (separatrices). Por otro lado, sabemos que en dimensión dos existe la reducción de singularidades de \mathcal{F} , como consecuencia de los resultados de Seidenberg [Sei]. Esto nos permitirá dar una formulación equivalente del concepto de dicriticidad.

Una observación sobre la descripción de una foliación: la forma diferencial ω describe \mathcal{F} , pero también lo hace de igual manera la forma meromorfa $(f/g)\omega$. Siempre se puede, multiplicando y dividiendo, elegir un generador holomorfo cuyos coeficientes no tengan un divisor común. Así, si consideramos la explosión del origen

$$\pi : M_1 \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

el transformado $\sigma^*\mathcal{F}$ es la foliación descrita por la forma diferencial global $\pi^*\omega$. El procedimiento se puede iterar, haciendo nuevas explosiones en puntos de M_1 .

El teorema de reducción de singularidades afirma que existe un morfismo $\sigma : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, composición de una sucesión finita de explosiones con centro en puntos

$$(\mathbb{C}^2, 0) \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \xleftarrow{\pi_3} \dots \xleftarrow{\pi_N} M_N = M$$

de modo que todos los puntos de M sean *simples para $\sigma^*\mathcal{F}$ con respecto del divisor excepcional $D = \sigma^{-1}(0)$* .

¹Estas notas son una revisión de antiguas conversaciones con Dominique Cerveau, y recientes con Jorge Vitório Pereira, estimulada por la permanente e inquieta curiosidad matemática de Alcides Lins Neto.

Recordemos la definición de este concepto. Tomemos un punto $P \in D$, o bien $P = \{0\}$ en el caso de que no haya explosiones y entonces $D = \emptyset$. Diremos que P es *simple* para $\sigma^*\mathcal{F}$, respecto de D , si se tiene una de las situaciones siguientes:

- A) El divisor $D = \emptyset$ y P es un punto regular de $\sigma^*\mathcal{F}$. Esto es, existen coordenadas locales x, y alrededor de P , tales que $\sigma^*\mathcal{F}$ está dado por $dx = 0$.
- B) El punto P es un punto regular de D y de $\sigma^*\mathcal{F}$, además existen coordenadas locales x, y alrededor de D tales que $D = \{x = 0\}$ y $\sigma^*\mathcal{F}$ está dado por $dx = 0$. En este caso, el divisor es invariante en el punto P (más precisamente, la componente irreducible del divisor que pasa por el punto P es invariante).
- C) El punto P es un punto regular de D y de $\sigma^*\mathcal{F}$, además existen coordenadas locales x, y alrededor de D tales que $D = \{y = 0\}$ y $\sigma^*\mathcal{F}$ está dado por $dx = 0$. En este caso, el divisor es transversal en P .
- D) El punto P es un punto de esquina de D y regular de $\sigma^*\mathcal{F}$, además existen coordenadas locales x, y alrededor de D tales que $D = \{xy = 0\}$ y $\sigma^*\mathcal{F}$ está dado por $dx = 0$. En este caso el divisor tiene una componente irreducible invariante y otra transversal en P .
- E) El punto P es un punto regular de D y singular de $\sigma^*\mathcal{F}$, el divisor D es invariante en P y existen coordenadas locales x, y alrededor de D tales que $D = \{x = 0\}$ y la foliación está dada por una forma meromorfa de uno de los tipos siguientes:

a) $\omega = (\lambda + xg(x, y) + yh(x, y))dx/x - dy$, donde λ es un número complejo que no es un racional positivo (nótese que es posible que $\lambda = 0$, es uno de los casos de “silla-nodo”).

b) $\omega = dx/x - (xg(x, y) + yh(x, y))dy$, este es otro caso de silla nodo.

- F) El punto P es un punto de esquina de D y singular de $\sigma^*\mathcal{F}$, las dos componentes irreducibles del divisor D en P son invariantes y existen coordenadas locales x, y alrededor de D tales que $D = \{xy = 0\}$ y la foliación está dada por una forma meromorfa del tipo:

$$\omega = (\lambda + xg(x, y) + yh(x, y))\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y},$$

donde λ es un número complejo que no es un racional positivo (si $\lambda = 0$, tenemos una “silla-nodo”).

No pretendemos en estas notas insistir en la clasificación de las singularidades simples (estas han sido profundamente estudiadas por Martinet y Ramis para los tipos asimilables a sillan-nodo y por Yoccoz, Pérez-Marco y otros para los casos formalmente linealizables). No obstante, nos interesan ciertas propiedades, de comprobación inmediata, que son pertinentes de cara a la idea de dicriticidad.

Con el fin de no arrastrar pesadas notaciones, supongamos que tenemos la situación siguiente: un espacio ambiente M de dimensión dos, un divisor con cruzamientos normales D sobre M y una foliación \mathcal{F} sobre M . Consideremos un punto $P \in M$ y la explosión

$$\pi : M' \rightarrow M$$

de centro P , denotaremos $D' = \pi^{-1}(\{P\} \cup D)$ (que es un divisor con cruzamientos normales de M') y \mathcal{F}' el transformado de \mathcal{F} por π . La primera propiedad es la *estabilidad*

Si P es simple para \mathcal{F} respecto de D , entonces todo punto P' de $\pi^{-1}(P)$ es simple para \mathcal{F}' respecto de D' y además $\pi^{-1}(P)$ es una curva invariante.

Precisando aún más, en el caso de P sea simple y no singular, existe un único germen de curva invariante Γ para \mathcal{F} que pasa por P (la hoja de la foliación que pasa por el punto), además $\Gamma \cup D$ es un divisor con cruzamientos normales en P : o bien Γ coincide con una componente de D o solo hay una de estas y es transversal a ella (un caso especial es en el que $P \notin D$). Después de la explosión, aparece una única singularidad, que se corresponde con el transformado estricto de Γ .

En el caso de que P sea una singularidad simple de \mathcal{F} , relativa a D , sabemos que existen exactamente dos curvas invariantes Γ_1, Γ_2 , una de ellas posiblemente formal, que son no singulares y tales que $D \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ tiene cruzamientos normales en P ; esto último exige que $D \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, localmente en P . Al efectuar la explosión con centro P , aparecen exactamente dos singularidades, cada una asociada al transformado estricto de una de las curvas invariantes.

Consideremos el morfismo $\sigma : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de reducción de singularidades. Hay una biyección entre el conjunto de gérmenes de curvas invariantes de \mathcal{F} en 0 y el conjunto de parejas (P, Γ) , donde $P \in \pi^{-1}(0)$ y Γ es un germen en P de curva invariante para $\pi^*\mathcal{F}$ que no está contenido en el divisor excepcional $D = \pi^{-1}(0)$. Dado que solo hay un número finito de singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ (son aisladas), cada una contribuyendo con un germen de curva, como máximo (ninguno si es una esquina), la única manera de que aparezcan infinitas curvas invariantes en el origen para \mathcal{F} es que exista alguna componente irreducible del divisor transversal; esta contribuye con una curva invariante por cada punto, excepto aquellos que se corresponden a esquinas del divisor. Tenemos así la primera caracterización

La foliación \mathcal{F} es dicrítica en el origen si y solo si existe una reducción de singularidades tal que el divisor excepcional tenga una componente irreducible genéricamente transversal. Además, *toda* reducción de singularidades debe cumplir con esta propiedad.

Veremos que en dimensión tres hay que reconsiderar estas ideas y no tienen generalización automática.

Primeras consideraciones en dimensión ambiente tres Sea \mathcal{F} un germen de foliación holomorfa singular sobre $(\mathbb{C}^3, 0)$. Sabemos que \mathcal{F} está dada por $\omega = 0$, donde

$$\omega = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz$$

es un germen de 1-forma holomorfa integrable, es decir: $\omega \wedge d\omega = 0$. Del mismo modo que antes, seleccionamos ω con coeficientes sin factor común, aunque para definir la foliación es suficiente considerar cualquier forma meromorfa integrable múltiplo de ω . Decimos que un germen de superficie $f = 0$ es invariante para \mathcal{F} si $\omega \wedge df$ es divisible por f (cuando ω no lo es).

Existen foliaciones que no tienen gérmenes de superficie invariantes. Para verlo se puede usar el ejemplo de Darboux-Jouanolou de foliación $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ que no tiene curva algebraica (proyectiva) invariante. Dicho ejemplo se construye del siguiente modo. Si consideramos una 1-forma diferencial

$$W = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$$

cuyos coeficientes sean polinomios homogéneos del mismo grado y que satisfagan $xA + yB + zC = 0$, se tiene automáticamente la condición de integrabilidad y la foliación correspondiente es *cónica* en el sentido de que toda recta pasando por el origen es invariante. En estas condiciones, la explosión del origen

$$\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$$

da una foliación $\pi^*\mathcal{F}$ transversal al divisor excepcional $D = \pi^{-1}(0) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$; se induce por restricción una foliación $\mathcal{G} = \pi^*\mathcal{F}|_D$ sobre $D = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Esta construcción es completamente general y se pueden construir de este modo todas las foliaciones holomorfas sobre el plano proyectivo. Si ahora elegimos el ejemplo de Darboux-Jouanolou, que no tiene curva algebraica invariante, concluimos que la foliación cónica de $(\mathbb{C}^3, 0)$ correspondiente no puede tener una superficie invariante, ya que sería un cono, por consiguiente algebraica, cuyo proyectivizado daría una curva invariante en el plano proyectivo.

En el ejemplo anterior es notable que el divisor excepcional después de una explosión es transversal y sin embargo, al contrario de lo que ocurre en dimensión ambiente dos, no aparecen infinitas hipersuperficies invariantes, de hecho en algunos casos no hay ninguna. Así pues, la dicriticidad en el sentido de que aparezca un divisor transversal después de una o varias explosiones no está ligada a la existencia de infinitas hipersuperficies invariantes.

Si tomamos como criterio la aparición de un divisor transversal, debemos ser cuidadosos en el sentido de que podríamos percibir una *falsa dicriticidad* si el divisor está producido por la explosión de un centro no invariante. El caso más claro, en palabras de Thom, es el de la explosión del eje de las z , dado por $x = y = 0$ en \mathbb{C}^3 y la foliación horizontal dada por $dz = 0$; el centro de la explosión es transversal y el divisor excepcional también.

Un criterio correcto es la aparición, después de explosiones con centros invariantes, de un divisor excepcional transversal. Veremos que en dimensión tres este criterio no solamente es correcto sino que es verificable de modo completo con solo efectuar el número finito de explosiones correspondiente a la desingularización.

Definición de dicriticidad Sea \mathcal{F} un germen de foliación holomorfa singular sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$. Diremos que \mathcal{F} es *dicrítica* si existe un germen de aplicación analítica no invariante para \mathcal{F} (y por consiguiente el transformado recíproco de \mathcal{F} está bien definido)

$$\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$$

tal que $\phi^*\mathcal{F} = \{dx = 0\}$ y tal que la imagen por ϕ de la curva $y = 0$ sea invariante para \mathcal{F} . Nótese que $y = 0$ y la foliación regular $dx = 0$ son transversales. Diremos que \mathcal{F} es *estrictamente dicrítica en el origen* si existe un germen de aplicación analítica no invariante para \mathcal{F}

$$\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$$

tal que $\phi^*\mathcal{F}$ tiene una infinidad de curvas analíticas invariantes que llegan al origen.

Veamos que estos conceptos coinciden en dimensión dos y que a su vez son equivalentes a decir que la foliación tiene una infinidad de curvas analíticas invariantes en el origen. En primer lugar supongamos que \mathcal{F} , foliación sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$, tiene una cantidad infinita de curvas invariantes analíticas invariantes en el origen. Tomando $\phi =$ “identidad”, observamos que \mathcal{F} es estrictamente dicrítica en el origen, según la definición precedente. Más aún, la desingularización de \mathcal{F} nos permite, localizándonos en un punto genérico de una componente transversal del divisor excepcional, ver que también se cumple la definición de dicriticidad (se toma como curva $y = 0$ dicha componente del divisor). Recíprocamente, si \mathcal{F} es estrictamente dicrítica en el origen, las imágenes de las infinitas curvas invariantes de $\phi^*\mathcal{F}$ son invariantes para \mathcal{F} , y genéricamente una infinidad de curvas distintas (la comprobación de esta propiedad es relativamente sencilla). Por otro lado tenemos un hecho general que es

“Dicriticidad estricta en el origen” implica “dicriticidad” (en cualquier dimensión).

La prueba de esto de nuevo hace uso de la reducción de singularidades en dimensión dos. Así completamos la equivalencia anunciada en dimensión dos.

Dicriticidad y explosiones con centros invariantes Sea \mathcal{F} un germen de foliación holomorfa singular sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$ y supongamos que existe una sucesión finita de explosiones con centros lisos e invariantes

$$(\mathbb{C}^n, 0) \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \xleftarrow{\pi_3} \dots \xleftarrow{\pi_N} M_N = M$$

tal que el divisor excepcional $D \subset M$ tenga una componente irreducible genéricamente transversal. Tomando una sección plana genérica de esta componente, vemos inmediatamente que la foliación \mathcal{F} es dicrítica. Para responder al recíproco de esta afirmación, con espacio ambiente de dimensión tres, precisaremos de nuevo de la reducción de singularidades.

La reducción de singularidades en dimensión tres Daremos aquí una brevísimas descripción del teorema principal de [Ca2]. En dicho artículo y en [CaCe] se introduce el concepto de *singularidad simple de foliación en dimensión tres*. Recordaremos aquí las propiedades que nos interesan, sin dar explícitamente la definición. Hay dos tipos esencialmente de singularidades simples en dimensión tres: las de tipo dimensional dos y las de tipo dimensional tres.

Las singularidades de tipo dimensional dos son aquellas que se expresan solo en dos variables y se corresponden a singularidades simples en dimensión dos. De un modo más geométrico, supongamos que \mathcal{F} es un germen de foliación holomorfa singular sobre $(\mathbb{C}^3, 0)$, diremos que el origen es una singularidad simple de tipo dimensional dos si existe un campo de vectores no singular X tangente a \mathcal{F} y para cada sección plana Δ transversal a X , la foliación $\mathcal{F}|_{\Delta}$ tiene una singularidad simple en el origen. En particular, el lugar singular $\text{Sing}\mathcal{F}$ de \mathcal{F} es una curva no singular y el conjunto $S_0\mathcal{F}$ de separatrices formales (hipersuperficies integrales) está constituido por dos planos transversales que se cortan en el lugar singular.

Las singularidades de tipo dimensional tres, confluencia de las de tipo dimensional dos son tales que el conjunto $S_0\mathcal{F}$ de separatrices formales está constituido por tres planos con cruzamientos normales. El lugar singular consiste en las tres rectas intersección de dichos planos.

Destacamos la propiedad que más nos interesa de las singularidades simples

Sea $Y \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ un subconjunto analítico liso invariante para \mathcal{F} y que tiene cruzamientos normales con $S_0\mathcal{F}$. Consideremos la explosión $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ de centro Y . Entonces todas las singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ son simples y además el divisor excepcional $\pi^{-1}(Y)$ es invariante.

Una consecuencia de esta propiedad es el siguiente

Lema 1 *Supongamos que el origen es una singularidad simple de \mathcal{F} y sea $\Gamma \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ un germen de curva invariante para \mathcal{F} . Entonces $\Gamma \subset S_0\mathcal{F}$.*

Demostración: Si esto no fuera así, desingularizaríamos Γ por explosiones de puntos, que solo generan más singularidades simples con divisores invariantes. La curva desingularizada terminaría cortando al divisor excepcional, de manera transversal en un punto no singular y no podría ser invariante. \square

Ahora podemos enunciar el teorema de reducción de singularidades en dimensión tres:

Teorema 1 ([Ca2]) *Sea \mathcal{F} un germen de foliación holomorfa singular sobre $(\mathbb{C}^3, 0)$. Existe una sucesión finita de explosiones con centros lisos, invariantes y con cruzamientos normales con el divisor excepcional*

$$(\mathbb{C}^n, 0) \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \xleftarrow{\pi_3} \dots \xleftarrow{\pi_N} M_N = M$$

de modo que todas las singularidades del transformado de \mathcal{F} en M son simples.

Sea $D_\sigma \subset M$ el divisor excepcional de $\sigma = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_N$. Obviamente hay dos posibilidades: todas las componentes irreducibles de D_σ son invariantes o bien existe una de ellas genéricamente transversal. Veremos que esta segunda posibilidad es equivalente a que la foliación sea dicrítica. En particular, para una foliación dada, *todas* las reducciones de singularidades tienen la misma naturaleza: en el caso no dicrítico todas las componentes irreducibles del divisor excepcional son invariantes, en el caso dicrítico existe al menos una componente del divisor excepcional genéricamente transversal.

Dicriticidad en términos de la reducción de singularidades Sea \mathcal{F} un germen de foliación holomorfa singular sobre $(\mathbb{C}^3, 0)$. Supongamos que la foliación es dicrítica. Vamos a probar que toda reducción de singularidades σ de \mathcal{F} es tal que su divisor excepcional D_σ tiene al menos una componente irreducible genéricamente transversal. Razonemos por el absurdo, suponiendo que existe una σ tal que D_σ es invariante.

Ahora podemos aplicar el método de [CaCe] para concluir que

Si una curva $\Gamma \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ es invariante para \mathcal{F} , entonces está contenida en el conjunto de separatrices $S_0\mathcal{F}$, que a su vez tiene un número finito de componentes irreducibles.

Sea ahora $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ la aplicación que da la dicriticidad. Tenemos dos opciones

- a) La imagen de $y = 0$ es una curva Γ invariante para \mathcal{F} . Hay “equirreducción genérica” a lo largo de esta curva y la única manera de que otras curvas invariantes se aproximen a ella es la aparición de una componente transversal en el proceso de reducción, al explotar sucesivamente Γ en su punto genérico.
- b) La imagen de $y = 0$ es el origen. Entonces tenemos infinitas curvas invariantes contenidas en $S_0\mathcal{F}$, las imágenes de las curvas verticales $x = cte$ (excepto eventualmente $x = 0$ por razones de discriminante). Considerando una ecuación $f = 0$ de $S_0\mathcal{F}$ llegaríamos a que $f \circ \sigma = 0$ contiene infinitas curvas, absurdo pues ϕ es genéricamente transversal a \mathcal{F} .

Resumiendo, hemos concluido lo siguiente

Teorema 2 *Sea \mathcal{F} un germen de foliación holomorfa singular sobre $(\mathbb{C}^3, 0)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *La foliación es no dicrítica.*
2. *Existe una reducción de singularidades de \mathcal{F} con el divisor excepcional invariante.*
3. *Toda reducción de singularidades de \mathcal{F} tiene el divisor excepcional invariante.*
4. *Toda sucesión de explosiones con centros lisos e invariantes tiene el divisor excepcional invariante.*

Algunas cuestiones Sea \mathcal{F} un germen de foliación holomorfa singular sobre $(\mathbb{C}^3, 0)$ y $S \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ una superficie no invariante. Si el lugar singular de S es invariante para \mathcal{F} , se puede hacer una desingularización simultánea de \mathcal{F} y de S en ese caso la no dicriticidad de \mathcal{F} impediría la existencia de infinitas curvas invariantes sobre S . Tampoco es difícil, a partir de una inmersión proyectiva del espacio total de una desingularización de \mathcal{F} (y una aplicación del teorema de Bertini), ver que en el caso dicrítico existe una superficie S con lugar singular invariante y con infinitas curvas invariantes (en el sentido de la definición de dicriticidad, no necesariamente en el origen).

Queda pendiente estudiar más profundamente las implicaciones de la condición de dicriticidad (o no) estricta en el origen, así como el caso de dimensión superior en ausencia (por ahora) de un resultado de desingularización.

Referencias

- [Ca1] F. Cano: *Dicriticalness of a singular foliation*, pp. 73–94 en *Holomorphic Dynamics (México 1986)*, Lecture Notes in Mathematics 1345, Springer-Verlag, 1988.
- [Ca2] F. Cano: *Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three*, *Annals of Mathematics* (2), 160(3):907–1011, 2004.
- [CaCe] F. Cano y D. Cerveau: *Desingularization of nondicritical holomorphic foliations and existence of separatrices*, *Acta Mathematica*, 169(1-2):1–103, 1992.
- [Sei] A. Seidenberg: *Reduction of the singularities of the differential equation $Ady = Bdx$* , *American Journal of Mathematics*, 90(1):248–269, 1968.

Uniformización local en característica cero. Caso arquimediano

Felipe Cano Claude Roche Mark Spivakovsky

1. Introducción

En estas notas presentamos una prueba de la uniformización local clásica (característica cero sobre un cuerpo algebraicamente cerrado) con respecto a una valoración arquimediana (es decir, de rango uno). La prueba se apoya fuertemente en una presentación del problema en términos del polígono de Newton-Puiseux y en la dicotomía básica de la reducción de singularidades entre el comportamiento combinatorio (descrito por el juego de Hironaka) y las situaciones de contacto maximal, también en el sentido de Hironaka.

No pretendemos dar ningún resultado nuevo, sino únicamente resaltar los métodos, con la esperanza de que puedan ser útiles en otros contextos. De hecho los métodos presentados aquí son una simplificación al caso que nos ocupa del método general utilizado por Spivakovsky en su tratamiento de la característica positiva y que, por otro lado, se está mostrando satisfactorio para el estudio del problema de uniformización local de campos de vectores.

2. Enunciados

Sea K el cuerpo de funciones racionales de una variedad algebraica proyectiva de dimensión n , sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica cero y consideremos sobre él una valoración

$$\nu : K \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}$$

con cuerpo residual $k_\nu = k$.

Un *modelo local regular parametrizado* para K, ν es una terna

$$\mathcal{A} = (\mathcal{O}; \mathbf{z} = (\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r), \mathbf{y} = (y_{r+1}, \dots, y_n)); \nu)$$

donde r es el rango racional de ν y se tienen las siguientes propiedades:

1. Existe un modelo proyectivo M de K tal que el centro P de ν en M es no singular y $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{M,P}$. (Nótese que la hipótesis $k_\nu = k$ implica que el centro de ν es un punto racional).

2. La lista $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ da un sistema regular de parámetros de \mathcal{O} y los valores $\nu(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ son \mathbb{Q} -independientes.

Definición 1 Dado un elemento formal $\hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}$, con $\hat{f} \neq 0$, diremos que la valoración ν tiene contacto maximal con \hat{f} si existe una sucesión de elementos $f_i \in \mathcal{O}$ tales que $\nu(f_i)$ es una sucesión de valores estrictamente creciente y además $f_i \rightarrow \hat{f}$ en la topología de Krull.

Observación 1 La sucesión de valores estrictamente creciente $\nu(f_i)$ no puede estar acotada superiormente. La prueba de esto se basa en que la valoración es arquimediana. Supongamos que la sucesión de valores estuviera acotada superiormente por un valor δ ; como la valoración es arquimediana, existe una potencia común $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, tal que x_i^N, y_j^N tienen valor superior a δ , para $i = 1, 2, \dots, r$, $j = r + 1, r + 2, \dots, n$. Se concluye que el ideal maximal \mathcal{M} de \mathcal{O} satisface

$$\mathcal{M}^N \subset \mathcal{P}_\delta = \{g \in \mathcal{O}; \nu(g) \geq \delta\}.$$

Se tendría una cadena descendente estricta de módulos de longitud finita

$$\cdots \supset \mathcal{P}_{\nu(f_i)}/\mathcal{M}^N \supset \mathcal{P}_{\nu(f_{i+1})}/\mathcal{M}^N \supset \cdots$$

lo que es una contradicción.

El objeto problema es una lista finita $L = \{f_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ de funciones racionales $f_\alpha \in K$ con valores no negativos $\nu(f_\alpha) \geq 0$. Diremos que la lista L es *simple* en el modelo \mathcal{A} si se cumplen las condiciones siguientes:

1. Todos los elementos de L son regulares, esto es $f_\alpha \in \mathcal{O}$ para todo $\alpha \in \Lambda$.
2. Cada f_α es de la forma $f_\alpha = \mathbf{x}^{\mathbf{a}_\alpha} U_\alpha$, donde U_α es una unidad del anillo local \mathcal{O} y $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_\alpha}$ es el monomio

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}_\alpha} = x_1^{a_{\alpha 1}} x_2^{a_{\alpha 2}} \cdots x_r^{a_{\alpha r}}.$$

3. Si $\nu(f_\alpha) \leq \nu(f_\beta)$, entonces f_α divide f_β en el anillo \mathcal{O} . Esto es, se tiene que $a_{\alpha, j} \leq a_{\beta, j}$ para cada $j = 1, 2, \dots, r$.

Nuestro objetivo es, partiendo de un modelo local regular parametrizado, probar que después de una sucesión de transformaciones adecuada se tiene que o bien aparece una serie formal \hat{f} tal que ν tiene contacto maximal con \hat{f} o bien obtenemos una lista simple.

Antes de establecer el enunciado, introduzcamos el tipo de transformaciones que vamos a considerar. Dado el modelo local regular parametrizado \mathcal{A} y un conjunto $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$, vamos a definir la *explosión*

$$\mathcal{A}' = \pi_A \mathcal{A} = (\mathcal{O}'; \mathbf{z}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}'); \nu)$$

de \mathcal{A} con centro A . Para construir \mathcal{O}' definiremos primero las funciones racionales z'_i que conforman el sistema de parámetros $\mathbf{z}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$. El anillo \mathcal{O}'

será entonces el localizado algebraico en el ideal engendrado por \mathbf{z}' del anillo de polinomios $\mathcal{O}[\mathbf{z}'] \subset K$. Separaremos dos casos

El caso combinatorio Este caso corresponde a la existencia de un único índice $i_0 \in A$ tal que $\nu(z_{i_0}) < \nu(z_i)$ para cada $i \in A \setminus \{i_0\}$. Entonces definimos

$$z'_i = z_i/z_{i_0}, \text{ si } i \in A \setminus \{i_0\}$$

y $z'_i = z_i$ para los índices $i = i_0$ ó $i \notin A$. Nótese que $\nu(z'_i) > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ y que los valores $\nu(x'_i)$ son independientes para $i = 1, 2, \dots, r$.

El caso con traslación Este caso corresponde a la existencia de varios parámetros, con índice en A , que tengan el valor mínimo. Elijamos i_0 el menor de estos índices. Si $\nu(z_i) = \nu(z_{i_0})$, dado que $k_\nu = k$ sabemos que existe un único $\lambda_i \in k \setminus \{0\}$ tal que $\nu(z_i/z_{i_0} - \lambda_i) > 0$. Hagamos $\lambda_i = 0$ si $\nu(z_i) > \nu(z_{i_0})$. Definimos entonces

$$z'_i = z_i/z_{i_0} - \lambda_i, \text{ si } i \in A \setminus \{i_0\}$$

y $z'_i = z_i$ para los índices $i = i_0$ ó $i \notin A$. Como en el caso anterior, tenemos que $\nu(z'_i) > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ y los valores $\nu(x'_i)$ son independientes para $i = 1, 2, \dots, r$.

Observación 2 Supongamos que M es un modelo birracional de K tal que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{M,P}$, donde P es el centro de ν en M . Las ecuaciones $\{z_i = 0; i \in A\}$ definen una subvariedad irreducible $Y \subset M$, que es no singular en el punto P . Consideremos la explosión $\pi : M' \rightarrow M$ de M con centro Y . Sea $P' \in \pi^{-1}(P)$ el centro de ν en M' . Entonces $\mathcal{O}' = \mathcal{O}_{M',P'}$.

Asimismo, introduciremos los j -cambios de coordenadas, definidos para índices $j > r$. Se trata de cambios de la forma:

$$z'_i = z_i, i \neq j; y'_j = y_j - H(z_1, z_2, \dots, z_{j-1}),$$

donde $H \in \mathcal{O}$ no es una unidad, esto es $\nu(H) > 0$. Cuando no queramos mencionar explícitamente el índice j , hablaremos de *cambios ordenados de coordenadas*.

El resultado cuya prueba deseamos detallar en estas notas es el siguiente:

Teorema 1 Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{O}; \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}); \nu)$ un modelo local regular parametrizado para K, ν . Consideremos una lista finita $L = \{f_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ de funciones racionales no nulas $f_\alpha \in K$ con valores no negativos $\nu(f_\alpha) \geq 0$. Existe un modelo local regular parametrizado $\mathcal{A}' = (\mathcal{O}'; \mathbf{z}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}'); \nu)$ para K, ν obtenido por una cadena finita de explosiones a partir de \mathcal{A} y de j -cambios de coordenadas, tal que una de las dos propiedades se cumple:

- a) La valoración ν tiene contacto maximal con una serie formal $\hat{f}' \in \hat{\mathcal{O}}'$.
- b) La lista L es simple en \mathcal{A}' .

3. Paquetes de Puiseux de explosiones

Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{O}; \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}); \nu)$ un modelo local regular parametrizado para K, ν . Consideremos una variable dependiente y_j . Entonces el valor de y_j se expresa como una combinación racional de los valores de x_1, x_2, \dots, x_r . Es decir, existe un número entero $d > 0$ y números enteros p_1, p_2, \dots, p_r únicos tales que

$$d\nu(y_j) = p_1\nu(x_1) + p_2\nu(x_2) + \dots + p_r\nu(x_r),$$

y además d, p_1, p_2, \dots, p_r son primos entre sí. En particular la función racional

$$\Phi_j = y^d / \mathbf{x}^{\mathbf{p}}$$

tiene valor cero. Diremos que Φ_j es la j -ésima *función racional de contacto* para \mathcal{A} y que d es el *índice de contacto* de \mathcal{A} . Dado que el cuerpo residual de la valoración es k , existe un único $c \in k$ tal que $\nu(\Phi_j - c) > 0$. Sea $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ definido por $q_s = -p_s$ si $p_s < 0$ y $q_s = 0$ si $p_s \geq 0$; se tiene que $\mathbf{t} = \mathbf{p} + \mathbf{q} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$. Consideremos la función regular

$$\phi_j = \mathbf{x}^{\mathbf{q}} y^d - c \mathbf{x}^{\mathbf{t}} \in \mathcal{O}.$$

Diremos que $\phi_j = 0$ es la j -ésima *hipersuperficie de contacto* para \mathcal{A} . Los *paquetes de Puiseux de explosiones*, que introduciremos a continuación, se corresponden con un desingularización ordenada de la hipersuperficie de contacto.

Diremos que un subconjunto $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ es j -*admisibile* para \mathcal{A} si se cumple que $A \setminus \{j\} \subset \{s; p_s \neq 0\}$. Una explosión j -admisibile es la que se corresponde con un subconjunto j -admisibile para \mathcal{A} . Supongamos que \mathcal{A}' ha sido obtenida a partir de \mathcal{A} por explosión j -admisibile. Existen dos posibilidades:

- A) La explosión es combinatoria. En este caso se cumple que Φ_j es también la función racional de contacto para \mathcal{A}' y la hipersuperficie de contacto para \mathcal{A}' es el transformado estricto de la hipersuperficie de contacto para \mathcal{A} .
- B) La explosión no es combinatoria. La única posibilidad es que $\nu(y_j) = \nu(x_s)$, para un índice $1 \leq s \leq r$. En particular $\Phi_j = y_j/x_s$, $A = \{s, j\}$ y se tiene que $y'_j = \Phi_j - c$.

Definición 2 *Supongamos que \mathcal{A}' ha sido obtenida a partir de \mathcal{A} por una cadena finita de explosiones. Diremos que esta cadena es un j -paquete de Puiseux para \mathcal{A} si las explosiones son j -admisibles, todas combinatorias excepto la última que no lo es (en particular $y'_j = \Phi_j - c$). En este caso diremos que \mathcal{A}' ha sido obtenida a partir de \mathcal{A} por un j -paquete de Puiseux. También diremos que \mathcal{A}' ha sido obtenida a partir de \mathcal{A} por una j -transformación de Puiseux.*

Proposición 1 *Dado \mathcal{A} y un índice j , $r + 1 \leq j \leq n$, existe al menos un j -paquete de Puiseux.*

Demostración: Es suficiente hacer una desingularización estándar de la hipersuperficie de contacto. \square

La siguiente observación, de demostración inmediata, resume las propiedades principales que deseamos retener de los paquetes de Puiseux.

Observación 3 Supongamos que \mathcal{A}' ha sido obtenida a partir de \mathcal{A} por un j -paquete de Puiseux. Entonces tenemos las siguientes propiedades

1. $y'_j = \Phi_j - c$.
2. Para todo índice $m \neq j$, $r + 1 \leq m \leq n$, se tiene $y'_m = y_m$.
3. Existe una relación monomial del tipo siguiente

$$x_s = \mathbf{x}'^{\mathbf{a}^s} (y'_j + c)^{b_s}; \quad y_j = \mathbf{x}'^{\mathbf{a}^0} (y'_j + c)^{b_0},$$

donde $\mathbf{a}^s, \mathbf{a}^0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ y $b_s, b_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

En el caso de que $r = n$ y por consiguiente no podemos destacar una variable dependiente, diremos, por definición, que cualquier sucesión finita de explosiones, que deben ser necesariamente combinatorias, es un paquete de Puiseux.

4. Primeras reducciones e inducción

Vamos a probar un resultado más fuerte que el teorema 1, en el que precisamos que la sucesión de explosiones que utilizaremos es de hecho una cadena de paquetes de Puiseux. Concretamente, el resto de estas notas está dedicado a probar el siguiente enunciado:

Teorema 2 Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{O}; \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}); \nu)$ un modelo local regular parametrizado para K, ν . Consideremos una lista finita $L = \{f_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ de funciones racionales no nulas $f_\alpha \in K$ con valores no negativos $\nu(f_\alpha) \geq 0$. Existe un modelo local regular parametrizado $\mathcal{A}' = (\mathcal{O}'; \mathbf{z}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}'); \nu)$ para K, ν obtenido por una cadena finita de paquetes de Puiseux y de cambios ordenados de coordenadas a partir de \mathcal{A} tal que una de las dos propiedades se cumple:

- a) La valoración ν tiene contacto maximal con una serie formal $\hat{f}' \in \widehat{\mathcal{O}'}$.
- b) La lista L es simple en \mathcal{A}' .

A continuación, mostremos que el teorema 2 es una consecuencia de la siguiente proposición, en la que únicamente se consideran funciones regulares:

Proposición 2 Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{O}; \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}); \nu)$ un modelo local regular parametrizado para K, ν . Consideremos una lista finita $L = \{f_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ de funciones regulares no nulas $f_\alpha \in \mathcal{O}$. Existe un modelo local regular parametrizado \mathcal{A}' para K, ν obtenido por una cadena finita de paquetes de Puiseux y de cambios ordenados de coordenadas a partir de \mathcal{A} tal que una de las dos propiedades se cumple:

- a) La valoración ν tiene contacto maximal con una serie formal $\hat{f}' \in \widehat{\mathcal{O}'}$.

b) La lista L es simple en \mathcal{A}' .

Nótese que la proposición 2 es una evidente consecuencia del teorema 1. Recíprocamente, supongamos que la proposición 2 es cierta y probemos que el teorema 1 también lo debe ser. Escribamos la lista problema

$$L = \{f_\alpha = g_\alpha/h_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$$

donde $g_\alpha, h_\alpha \in \mathcal{O}$ y además $0 \leq \nu(f_\alpha) = \nu(g_\alpha) - \nu(h_\alpha)$. Ahora apliquemos la proposición 2 a la nueva lista

$$\tilde{L} = \{g_\alpha\} \cup \{h_\alpha\}.$$

Se obtiene un modelo local regular parametrizado $\tilde{\mathcal{A}}$ en el cual \tilde{L} es simple (suponemos implícitamente que nunca obtenemos el contacto maximal). En particular cada h_α divide g_α y, por consiguiente $f_\alpha \in \tilde{\mathcal{O}}$. Es suficiente ahora aplicar de nuevo la proposición 2 a la lista original L a partir del modelo local regular parametrizado $\tilde{\mathcal{A}}$.

De hecho podemos restringirnos a listas con dos elementos. Más precisamente, la proposición 2 es equivalente a la siguiente

Proposición 3 *Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{O}; \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}); \nu)$ un modelo local regular parametrizado para K, ν . Consideremos una pareja $\{f, g\}$ de funciones regulares no nulas $f, g \in \mathcal{O}$. Existe un modelo local regular parametrizado \mathcal{A}' para K, ν obtenido por una cadena finita de paquetes de Puiseux y de cambios ordenados de coordenadas a partir de \mathcal{A} tal que una de las dos propiedades se cumple:*

- a) La valoración ν tiene contacto maximal con una serie formal $\hat{f}' \in \hat{\mathcal{O}}'$.
- b) La lista $\{f, g\}$ es simple en \mathcal{A}' .

Necesitaremos el siguiente lema

Lema 1 (Estabilidad de listas simples) *Supongamos que $\mathcal{A}' = \pi_A \mathcal{A}$ o que se ha obtenido por un cambio ordenado de coordenadas a partir de \mathcal{A} y que la lista L es simple en \mathcal{A} . Entonces L también es simple en \mathcal{A}' .*

Demostración: Es una comprobación elemental. □

Ahora una aplicación repetida de la proposición 3 a todas las parejas de la lista problema en la proposición 2 nos permite concluir, a la vista del lema.

Siendo más precisos, no necesitamos demostrar la proposición 3 en su integridad, sino únicamente el siguiente resultado:

Proposición 4 *Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{O}; \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}); \nu)$ un modelo local regular parametrizado para K, ν . Consideremos una pareja $\{f, g\}$ de funciones regulares no nulas $f, g \in \mathcal{O}$ tales que $\nu(f) \leq \nu(g)$. Existe un modelo local regular parametrizado \mathcal{A}' para K, ν obtenido por una cadena finita de paquetes de Puiseux y de cambios ordenados de coordenadas a partir de \mathcal{A} tal que una de las dos propiedades se cumple:*

- a) La valoración ν tiene contacto maximal con una serie formal $\hat{f}' \in \hat{\mathcal{O}}'$.
- b) La lista $\{f\}$ es simple en \mathcal{A}' y f divide g en \mathcal{O}' .

En efecto, una vez aplicada la proposición 4 se aplicará de nuevo a la lista $\{g, g\}$ para concluir que la lista $\{f, g\}$ se convierte en una lista simple.

Efectuaremos inducción sobre $n - r$. Si denotamos $T(n, r)$ el enunciado del teorema 2 con los parámetros n, r y denotamos $P_1(n, r)$, $P_2(n, r)$, $P_3(n, r)$ los enunciados correspondientes a las proposiciones 2, 3 y 4, de la discusión anterior se deduce que:

$$P_3(n, r) \Leftrightarrow T(n, r) \Leftrightarrow P_1(n, r) \Leftrightarrow P_2(n, r).$$

Trabajando por inducción, es suficiente probar que $P_3(n, n)$ es cierto y que $T(n - 1, r) \Rightarrow P_3(n, r)$.

5. El juego de Hironaka

Introduzcamos en esta sección el enunciado del juego débil de Hironaka. Una solución al mismo se encuentra en el trabajo de Spivakovsky [Spi]. Supongamos que $\Delta \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ es un poliedro positivamente convexo de vértices con coordenadas enteras. Dado un subconjunto $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ y un índice $i \in A$, definimos el poliedro transformado $\pi_{A,i}\Delta$ como el cierre positivamente convexo de $\sigma_{A,i}(\Delta)$, siendo $\sigma_{A,i}$ la aplicación lineal definida por

$$\sigma_{A,i}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$$

donde $b_j = a_j$ si $i \neq j$ y $b_i = \sum_{j \in A} a_j$. Es obvio que si Δ tiene un único vértice, entonces $\sigma_{A,i}(\Delta)$ también. El juego se plantea entre dos jugadores, el jugador A y el jugador B y se procede en cada lance de la manera siguiente:

Si el poliedro Δ tiene un solo vértice, se para el juego. Si hay más de un vértice, el jugador A elige un subconjunto $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ y el jugador B un índice $i \in A$. Se substituye Δ por $\pi_{A,i}\Delta$ y el juego recomienza.

El problema es encontrar una estrategia para guiar la elección que hace el jugador A que garantice que el juego es finito (se obtiene un poliedro con un solo vértice) independientemente de la estrategia seguida por el jugador B. Esta estrategia existe y ha sido definida por Spivakovsky en [Spi].

6. Rango racional máximo

Supondremos en esta sección que $r = n$ y procederemos a demostrar el enunciado $P_3(n, n)$.

Definamos el *poliedro de Newton* $\mathcal{N}(f; \mathbf{x})$ de un elemento regular $f \in \mathcal{O}$. Dado que $\mathcal{O} \subset \widehat{\mathcal{O}}$ y que hay una identificación $\widehat{\mathcal{O}} = k[[\mathbf{x}]]$, podemos escribir

$$f = \sum f_{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}}; \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, f_{\mathbf{a}} \in k.$$

El poliedro de Newton $\mathcal{N}(f; \mathbf{x})$ es entonces el cierre positivamente convexo del soporte $\text{Sop}(f; \mathbf{x}) = \{\mathbf{a}; f_{\mathbf{a}} \neq 0\}$. Si tenemos una lista $L = \{f_{\alpha}\}$ el soporte $\text{Sop}(L; \mathbf{x}) = \bigcup_{\alpha} \text{Sop}(f_{\alpha}; \mathbf{x})$ y el poliedro de Newton $\mathcal{N}(L; \mathbf{x})$ es el cierre positivamente convexo de dicho soporte.

Consideremos la pareja f, g del enunciado de la proposición 4. Es inmediato que las afirmaciones siguientes son equivalentes

1. La lista $\{f\}$ es simple en \mathcal{A} y f divide g en \mathcal{O} .
2. El poliedro de Newton $\mathcal{N}(\{f, g\}; \mathbf{x})$ tiene un solo vértice.

Por consiguiente, nuestro objetivo es probar que, salvo contacto maximal, se puede llegar a que el poliedro de Newton tiene un solo vértice. Esto será consecuencia directa de la existencia de estrategia ganadora para el juego de Hironaka, una vez comprobemos el efecto de una explosión.

Recordemos que $r = n$ y entonces $\mathbf{z} = \mathbf{x}$. Fijemos un conjunto $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Como los valores $\nu(x_s)$ son racionalmente independientes, existe un único índice $i \in A$ tal que $\nu(x_i) < \nu(x_j)$ para $j \in A - \{i\}$. En este caso sabemos que

$$x'_j = x_j/x_i, \text{ si } j \in A - \{i\}; x'_j = x_j, \text{ si } j = i \text{ ó bien } j \notin A.$$

Se concluye por un cálculo sencillo que el poliedro de Newton $\mathcal{N}(\{f, g\}; \mathbf{x}')$ es el cierre positivamente convexo de $\sigma_{A,i}(\mathcal{N}(\{f, g\}; \mathbf{x}))$. Ahora es de aplicación el juego de Hironaka, la valoración desempeña el papel del jugador B al seleccionar el índice i (la carta). Esto termina la prueba de $P_3(n, n)$.

7. El polígono de Newton-Puiseux

Hemos indicado que haremos inducción sobre $n - r$. Supongamos pues que $n > r$. Dado $f \in \mathcal{O}$, consideraremos su descomposición

$$f = \sum_s f_s(\mathbf{x}, \mathbf{w}) y^s$$

donde $\mathbf{w} = (y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_{n-1}), y = y_n$ y $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \in k[[\mathbf{x}, \mathbf{w}]]$. Para aplicar propiamente la inducción, precisamos del siguiente resultado, que admitiremos

Lema 2 *El anillo $\mathcal{O}_{n-1} = \mathcal{O} \cap k[[\mathbf{x}, \mathbf{w}]]$ es el anillo local de una variedad algebraica en un punto regular y $\{\mathbf{x}, \mathbf{w}\}$ define un sistema regular de parámetros. En la descomposición anterior, se tiene que $f_s \in \mathcal{O}_{n-1}$ para todo $s = 0, 1, \dots$. Más aún, si K_{n-1} es el cuerpo de fracciones de \mathcal{O}_{n-1} , la restricción ν_{n-1} de ν a K_{n-1} tiene rango racional r , cuerpo residual k y está centrada en \mathcal{O}_{n-1} .*

Ahora definimos el polígono de Newton-Puiseux $\Delta(f; \mathcal{A})$ como el cierre positivamente convexo del soporte valuativo

$$\text{Sopval}(f; \mathcal{A}) = \{(\nu(f_s), s); s = 1, 2, \dots\}.$$

Del mismo modo que en el caso del poliedro de Newton, definimos el polígono $\Delta(f, g; \mathcal{A})$ como el cierre positivamente convexo de la unión de los correspondientes polígonos.

Nuestro objetivo es probar que se puede conseguir, bajo la hipótesis de inducción, un polígono de Newton con un único vértice, y que éste sea de la forma $(\delta, 0)$. Esto es suficiente de acuerdo con la siguiente proposición

Proposición 5 *Supongamos que $T(n-1, r)$ es cierto y que el polígono de Newton $\Delta(f, g; \mathcal{A})$ tiene un único vértice, que es de la forma $(\delta, 0)$. Entonces, después de una cadena finita de paquetes de Puiseux y de cambios ordenados de coordenadas se obtiene la tesis de $P_3(n, r)$.*

Demostración: Escribamos $f = \sum_s f_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s$ y $g = \sum_s g_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s$. Consideremos el ideal I_{n-1} de \mathcal{O}_{n-1} generado por los elementos f_s y g_s . Este ideal tiene un conjunto finito de generadores, por noetherianidad; así que, aplicando $T(n-1, r)$ a la lista de estos generadores, existe una cadena finita de paquetes de Puiseux que transforma \mathcal{A} en \mathcal{A}' , con las siguientes propiedades:

1. Los centros de las explosiones están dados por conjuntos de índices en los que no aparece el último índice n . Esto no altera el polígono de Newton y se tiene $\Delta(f, g; \mathcal{A}) = \Delta(f, g; \mathcal{A}')$.
2. El ideal $I_{n-1}\mathcal{O}'_{n-1}$ está generado por un monomio de la forma $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$.

Así, podemos suponer por inducción que el ideal $I_{n-1}\mathcal{O}_{n-1}$ está generado por un monomio de la forma $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$. Escribamos entonces

$$f_s = \mathbf{x}^{\mathbf{a}}h_s; g_s = \mathbf{x}^{\mathbf{a}}t_s$$

donde la lista h_s, t_s contiene una unidad. La hipótesis sobre la forma del polígono implica que

$$\delta = \min\{\nu(f_0), \nu(g_0)\} \leq \nu(f_s), \nu(g_s).$$

y por tanto, o bien h_0 o bien t_0 es una unidad. Escribamos $f = \mathbf{x}^{\mathbf{a}}h$, $g_s = \mathbf{x}^{\mathbf{a}}t$. Si t_0 es una unidad, tenemos $\nu(g) = \nu(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}) \leq \nu(f)$ y por consiguiente $\nu(f) = \nu(\mathbf{x}^{\mathbf{a}})$, de lo que concluimos que también h_0 es una unidad. En todo caso h_0 es una unidad. Se sigue que h también lo es y $g = fh^{-1}t$. Obtenemos así la tesis de $P_3(n, r)$. \square

Nótese que en este caso es irrelevante la aparición o no de una serie formal con contacto maximal con la valoración. En adelante trabajaremos con la siguiente hipótesis

“No existe una serie formal con contacto maximal”.

De lo contrario ya tendríamos, como queremos, la tesis de $P_3(n, r)$.

8. El invariante de control

Continuamos trabajando por inducción, suponiendo que $T(n-1, r)$ es cierto. Deseamos probar que $P(n, r)$ es cierto. Como hemos visto en la sección anterior, es suficiente llegar mediante una cadena finita de paquetes de Puiseux y de cambios ordenados de coordenadas a una situación en la cual el polígono de Newton-Puiseux tenga un único vértice y que este sea de la forma $(\delta, 0)$. Mediremos la distancia que nos separa de la situación deseada con un invariante, ya utilizado por Spivakovsky en otro contexto.

Consideremos el polígono de Newton-Puiseux $\Delta(f, g; \mathcal{A})$. En la construcción del polígono se destaca la última variable y_n , a la que dotamos de peso unidad en el sentido vertical. Las rectas *isovalorativas*

$$L_t = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u + \nu(y_n)v = t\}$$

están definidas a partir de la propiedad siguiente: si $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y_n^s \in \mathcal{O}$ entonces $\nu(f_s y^s) = t$, donde t es tal que $(\nu(f_s), s) \in L_t$. Definamos el valor

$$\delta = \delta(f, g; \mathcal{A}) = \sup\{t; L_t \cap \Delta(f, g; \mathcal{A}) = \emptyset\}$$

El *invariante principal* que consideraremos es $h(f, g; \mathcal{A})$ definido por

$$h(f, g; \mathcal{A}) = \sup\{\beta; \text{ existe } (\alpha, \beta) \in \Delta(f, g; \mathcal{A}) \cap L_\delta\}.$$

Es obvio que $0 \leq h(f, g; \mathcal{A}) < \infty$. Además, si el polígono de Newton-Puiseux tiene un único vértice y este es de la forma $(a, 0)$, se tiene que $h(f, g; \mathcal{A}) = 0$.

Proposición 6 *Supongamos que $h(f, g; \mathcal{A}) = 0$. Entonces, después de transformar \mathcal{A} por una cadena finita de j -paquetes de Puiseux y de j -cambios de coordenadas, $j \leq n-1$, seguida de un n -paquete de Puiseux, el polígono de Newton $\Delta(f, g; \mathcal{A})$ tiene un único vértice, que es de la forma $(\delta, 0)$.*

Demostración: Escribamos $y = y_n$ (también $y' = y'_n$, después de las correspondientes transformaciones) y consideremos la descomposición

$$f = \sum_s f_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s; \quad g = \sum_s g_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s.$$

La hipótesis sobre el polígono de Newton-Puiseux se traduce en que existe el vértice $(\delta, 0)$ y que

$$\begin{aligned} \delta &= \nu(f_0) \leq \nu(g_0), \\ \delta &< \nu(y^s f_s), \nu(y^s g_s), \text{ para todo } s \geq 1. \end{aligned}$$

Apliquemos ahora la hipótesis de inducción a la lista finita

$$L = \{f_s, g_s; \nu(y^s) \leq \delta\}.$$

Después de una cadena finita de j -paquetes de Puiseux y de j -cambios de coordenadas, con $r+1 \leq j \leq n-1$, podemos suponer que la lista L es simple, sin que

se altere para nada el polígono ni la expresión de f, g . En particular podemos escribir

$$f_s = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^s} U_s(\mathbf{x}, \mathbf{w}); \quad g_s = \mathbf{x}^{\mathbf{c}^s} V_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})$$

para $0 \leq s \leq a/\nu(y)$, donde U, V son unidades. Ahora estamos en condiciones de aplicar un n -paquete de Puiseux. Considerando las expresiones descritas en la observación 3, tenemos para $0 \leq s \leq \delta/\nu(y)$ que

$$\begin{aligned} y^s f_s &= \mathbf{x}^{\mathbf{b}'^s} U'_s(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \\ y^s g_s &= \mathbf{x}^{\mathbf{c}'^s} U'_s(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \end{aligned}$$

donde U', V' son unidades; en particular, los monomios tienen los valores adecuados

$$\begin{aligned} \nu(\mathbf{x}^{\mathbf{b}'^s}) &= \nu(f_s) + s\nu(y), \\ \nu(\mathbf{x}^{\mathbf{c}'^s}) &= \nu(g_s) + s\nu(y). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\delta = \min\{\nu(f_0), \nu(g_0)\}$ y que $\delta < \nu(y^s f_s), \nu(y^s g_s)$ para $s \geq 1$, podemos escribir (salvo producto por un escalar)

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^t y^s f_s &= \mathbf{x}^{\mathbf{b}'^0} + \sum_{s \geq 1} \tilde{f}_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}') y'^s, \\ \sum_{s=0}^t y^s g_s &= \tilde{g}_0(\mathbf{x}', \mathbf{w}') + \sum_{s \geq 1} \tilde{g}_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}') y'^s, \end{aligned}$$

donde t es el máximo entero tal que $t \leq \delta/\nu(y)$ y donde los valores satisfacen que $\delta = \nu(\mathbf{x}^{\mathbf{b}'^0}) \leq \nu(\tilde{g}_0)$ y además

$$\delta < \nu(\tilde{f}_s), \nu(\tilde{g}_s); \quad 1 \leq s \leq \delta/\nu(y).$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$f = \sum_{s=0}^t y^s f_s + y^{t+1}(\dots); \quad g = \sum_{s=0}^t y^s g_s + y^{t+1}(\dots),$$

se concluye que tenemos una descomposición:

$$f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}'^0} + \sum_{s \geq 1} f'_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}') y'^s; \quad g = \sum_{s \geq 0} g'_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}') y'^s$$

en la que $\delta = \nu(\mathbf{x}^{\mathbf{b}'^0}) \leq \nu(g'_0), \nu(f'_s), \nu(g'_s)$, para $s \geq 1$. Así, el nuevo polígono de Newton-Puiseux tiene el único vértice $(\delta, 0)$. \square

Observación 4 Hemos preparado las ecuaciones, después de inducción, para que el nuevo polígono se comporte como el resultado de efectuar sobre el anterior una transformación afín del tipo $(u, v) \mapsto (u + v\nu(y), v)$. En el caso general, seguiremos esta idea, pero la transformación estará perturbada por el último desplazamiento.

9. Estabilidad del invariante de control

A la vista de la prueba de la proposición 6, tiene utilidad la siguiente definición. Sean $\delta = \delta(f, g; \mathcal{A})$, $h = h(f, g; \mathcal{A})$ y t el máximo entero menor o igual que $\delta/\nu(y)$. Diremos que la lista $\{f, g\}$ está \mathcal{A} -preparada si la lista $L = \{f_s, g_s; 0 \leq s \leq t\}$ es simple.

Lema 3 (\mathcal{A} -preparación) *Después de un número finito de j -transformaciones de Puiseux y de j -cambios de coordenadas, con $j \leq n - 1$ (que no alteran el polígono de Newton-Puiseux), la lista $\{f, g\}$ está \mathcal{A} -preparada.*

Demostración: Basta aplicar la hipótesis de inducción. □

Examinemos algunas consecuencias del hecho de que la lista $\{f, g\}$ esté \mathcal{A} -preparada. La parte \mathcal{A} -inicial de $\{f, g\}$ es la lista $\{F, G\}$ definida por

$$F = \sum_{s \leq h} F_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s; \quad G = \sum_{s \leq h} G_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s,$$

donde $F_s = f_s$, respectivamente $G_s = g_s$, si $\nu(f_s) + s\nu(y) = \delta$, respectivamente $\nu(g_s) + s\nu(y) = \delta$ y donde $F_s = 0$, resp. $G_s = 0$, cuando $\nu(f_s) + s\nu(y) > \delta$, resp. $\nu(g_s) + s\nu(y) > \delta$.

Sabemos que $(F_h, G_h) \neq (0, 0)$. De modo que existe un monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ de valor igual a $\delta - h\nu(y)$ que “principaliza” (F_h, G_h) y, más precisamente

$$(F_h, G_h) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}}(U_h, V_h)$$

con $(U_h, V_h) \neq (0, 0)$ y U_h , respectivamente V_h , es una unidad o idénticamente nulo. Nótese que el valor del monomio determina el vector de exponentes, por tratarse de variables independientes. Más aún, como $\{f, g\}$ está \mathcal{A} -preparada, para cada $0 \leq s \leq h$ tal que $(F_s, G_s) \neq (0, 0)$, tenemos

$$(F_s, G_s) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}}\mathbf{x}^{\mathbf{b}^{(s)}}(U_s, V_s)$$

donde U_s , respectivamente V_s , es una unidad o idénticamente nulo y donde el valor del monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{b}^{(s)}}$ debe ser igual a $(h - s)\nu(y)$. Recordemos ahora que, si d es el índice de contacto, tenemos $d\nu(y) = \nu(\mathbf{x}^{\mathbf{p}})$. Se concluye que

$$\mathbf{b}^{(s)} = \frac{h - s}{d}\mathbf{p}.$$

En particular $(h - s)/d$ debe ser entero cada vez que $(F_s, G_s) \neq (0, 0)$. Dicho de otro modo, podemos escribir

$$(F, G) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \sum_{m=0,1,\dots; dm \leq h} (\mathbf{x}^{\mathbf{p}})^m (U_{h-dm}, V_{h-dm})y^{h-dm}.$$

Nótese que esta expresión polinómica tiene como máximo $(h/d) + 1$ términos.

Proposición 7 *Supongamos que $h = h(f, g; \mathcal{A}) > 0$, que $\{f, g\}$ está \mathcal{A} -preparada y que el n -índice de contacto es $d \geq 1$. Después de una n -transformación de Puiseux de \mathcal{A} , obtenemos \mathcal{A}' tal que*

$$h' = h(f, g; \mathcal{A}') \leq h(f, g; \mathcal{A}) = h.$$

Además, si $d \geq 2$ se tiene que $h' < h$.

Demostración: Consideremos la parte \mathcal{A} -inicial $\{F, G\}$ definida más arriba y escribamos $\tilde{f} = f - F$, $\tilde{g} = g - G$, que descomponemos así

$$\tilde{f} = \sum_{s=0}^t \tilde{f}_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s + y^{t+1}\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \quad \tilde{g} = \sum_{s=0}^t \tilde{g}_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s + y^{t+1}\bar{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Como $\{f, g\}$ está \mathcal{A} -preparada, para cada $0 \leq s \leq t$ tenemos que

$$\tilde{f}_s(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{x}^{\tilde{\mathbf{a}}^{(s)}} \tilde{U}_s; \quad \tilde{g}_s(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{x}^{\tilde{\mathbf{b}}^{(s)}} \tilde{V}_s,$$

donde \tilde{U}_s y \tilde{V}_s son unidades y los monomios $\mathbf{x}^{\tilde{\mathbf{a}}^{(s)}}$ y $\mathbf{x}^{\tilde{\mathbf{b}}^{(s)}}$ tienen valor estrictamente superior a $\delta - s\nu(y)$. Aplicando ahora la n -transformación de Puiseux y teniendo en cuenta las expresiones de la observación 3, se concluye que hay una descomposición

$$\tilde{f} = \sum_{s \geq 0} \tilde{f}'_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}')y'^s; \quad \tilde{g} = \sum_{s \geq 0} \tilde{g}'_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}')y'^s,$$

con la propiedad de que $\nu(\tilde{f}'_s, \tilde{g}'_s) > \delta$ para todo índice $s \geq 0$.

Veamos ahora cómo se comporta $\{F, G\}$ después de la n -transformación de Puiseux. Escribamos

$$(F, G) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \sum_{m=0,1,\dots; dm \leq h} (\mathbf{x}^{\mathbf{p}})^m (\alpha_{h-dm} + U_{h-dm}^*, \beta_{h-dm} + V_{h-dm}^*) y^{h-dm},$$

donde $\nu(U_{h-dm}^*, V_{h-dm}^*) > 0$ y $\alpha_{h-dm}, \beta_{h-dm}$ son escalares. Consideremos el vector de polinomios

$$(P_F, P_G) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \sum_{m=0,1,\dots; dm \leq h} (\mathbf{x}^{\mathbf{p}})^m (\alpha_{h-dm}, \beta_{h-dm}) y^{h-dm}.$$

Haciendo un razonamiento similar al de la primera parte de esta demostración con $(F - P_F, G - P_G)$ concluimos que

$$(F - P_F, G - P_G) = \sum_{s \geq 0} ((f_s^{*'}(\mathbf{x}', \mathbf{w}'), g_s^{*'}(\mathbf{x}', \mathbf{w}')) y'^s,$$

donde $\nu(f_s^{*'}, g_s^{*'}) > \delta$. Recordando que $\Phi_n = y^d / \mathbf{x}^{\mathbf{p}}$, tenemos

$$(P_F, P_G) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \left(\frac{y}{\Phi_n} \right)^h \sum_{m=0,1,\dots; dm \leq h} (\alpha_{h-dm}, \beta_{h-dm}) (\Phi_n)^{h-m},$$

invocamos de nuevo las expresiones de la observación 3 para escribir

$$(P_F, P_G) = \mathbf{x}'^{\mathbf{a}'} (y' + c)^{b'} \sum_{m=0,1,\dots; dm \leq h} (\alpha_{h-dm}, \beta_{h-dm}) (y' + c)^{h-m},$$

donde $\nu(\mathbf{x}'^{\mathbf{a}'}) = \delta$, $b' \in \mathbb{Z}$.

Sea ahora q el mayor entero menor o igual que h/d . Nótese que si $d \geq 2$ entonces $q < h$ y que si $d = 1$ entonces $q = h$. Todavía podemos escribir

$$(P_F, P_G) = \mathbf{x}'^{\mathbf{a}'} (y' + c)^{b'+h-q} \sum_{m=0,1,\dots,q} (\alpha_{h-dm}, \beta_{h-dm}) (y' + c)^{q-m}.$$

Dado que $(\alpha_h, \beta_h) \neq (0, 0)$, podemos deducir una expresión

$$(P_F, P_G) = \mathbf{x}'^{\mathbf{a}'} y'^{t'} \left((\alpha', \beta') + \sum_{s \geq 1} (\alpha'_s, \beta'_s) y'^s \right)$$

donde $t' \leq q$ y $(\alpha', \beta') \neq (0, 0)$. Escribiendo ahora

$$(f, g) = (P_F, P_G) + (F - P_F, G - P_G) + (\tilde{f}, \tilde{g}),$$

concluimos que

$$(f, g) = \sum_s (f'_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}'), g'_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}')) y'^s$$

donde el primer vértice del polígono característico es precisamente (δ, t') , esto es $\nu(f'_s) > \delta$ si $s < t'$, $\nu(f'_{t'}) = \delta$ y $\nu(f'_s) \geq \delta$ si $s' \geq t'$. De aquí se concluye que

$$h(f, g; \mathcal{A}') \leq t' \leq h.$$

Además, hemos visto que si $d \geq 2$ entonces $t' < h$ pues $t' \leq q < h$. □

10. Contacto maximal

Supongamos ahora que $h \geq 1$ y no existen sucesiones finitas de transformaciones de Puiseux y de cambios ordenados de coordenadas que hagan descender h .

A la vista de la proposición 7, tras una preparación y una n -transformación de Puiseux, podemos suponer que el vértice principal (el primer vértice de la izquierda del polígono) es precisamente (δ, h) y que además en la descomposición

$$(f, g) = \sum_s (f_s, g_s) y^s$$

se tiene que $\nu(f_s, g_s) > \delta = \nu(f_h, g_h)$ para todo $s \neq h$. Nótese que el resultado es cierto para ambos casos $s > h$ y $s < h$; el caso $s > h$ es trivial, pues proviene de una expresión $y^{h+1}(\dots)$ después de la n -transformación de Puiseux, el caso

$s < h$ es como consecuencia de que el invariante h no ha descendido. Estamos pues en esta situación de partida. Ahora podemos hacer inducción considerando el ideal de las funciones f_s, g_s . Este ideal se puede principalizar, aplicando inducción a una lista finita de generadores del mismo. Se obtiene la propiedad adicional siguiente: existe un monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ que genera dicho ideal y tiene valor igual a δ . Dividiendo por este monomio la lista $\{f, g\}$ obtenemos una nueva lista $\{\bar{f}, \bar{g}\}$, que cumple exactamente con las mismas hipótesis que hemos enunciado en esta sección. Así pues, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\nu(f_h, g_h) = 0$ y que $\nu(f_s, g_s) > 0$ para $s \neq h$. Supondremos también, sin pérdida de generalidad que f_h es una unidad; si no fuera así intercambiaríamos los papeles de f, g . Más aún, dividiendo por f_h , se puede suponer que $f_h = 1$. Esto resume las hipótesis con las que trabajamos en esta sección.

En la situación precedente $\nu(f_{h-1}) = \nu(y)$. En efecto, sabemos que si hacemos una preparación (que no altera el polígono) y después una n -transformación de Puiseux, entonces el nuevo $h' = h$. Observando la estructura de la demostración de la proposición 7, concluimos que la primera pendiente de polígono debe ser exactamente igual a $-1/\nu(y)$ y que además debe existir una contribución de f_{h-1} al punto $(\nu(y), h - 1)$, con lo cual $\nu(f_{h-1}) = \nu(y)$. Más aún, siguiendo con detalle dicha prueba se puede concluir que

$$\nu\left(y + \frac{1}{h}f_{h-1}\right) > \nu(y).$$

Efectuemos ahora el n -cambio de coordenadas

$$y^{(1)} = y + \frac{1}{h}f_{h-1}$$

El punto $(0, h)$ continúa siendo un vértice del polígono y las restantes hipótesis se cumplen (dividiendo por el nuevo coeficiente de y^h , que es una unidad). Podemos repetir el argumento y efectuar el cambio

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \frac{1}{h}f_{h-1}^{(1)}.$$

De este modo generamos una sucesión $y^{(s)} \in \mathcal{O}$, $s = 0, 1, 2, \dots$, con valores estrictamente crecientes. Para encontrar nuestra serie formal con contacto maximal es ahora suficiente probar que la sucesión $f_{h-1}^{(s)}$ converge a cero en la topología de Krull.

Así pues falta probar que $\text{ord}(f_{h-1}^{(s+1)}) > \text{ord}(f_{h-1}^{(s)})$, para todo $s \geq 0$, donde $\text{ord}(\dots)$ denota el orden ádico respecto del ideal maximal de \mathcal{O} . Es suficiente tratar el caso $s = 0$. Recordemos que

$$f = \dots + f_{h+2}y^{h+2} + f_{h+1}y^{h+1} + y^h + f_{h-1}y^{h-1} + \dots + f_0.$$

Ahora tenemos que examinar el coeficiente $f_{h-1}^{(1)}$ de $(y^{(1)})^{h-1}$ después de hacer la transformación $y^{(1)} = y + f_{h-1}/h$. Se tiene que

$$f_{h-1}^{(1)} = f_{h+1} \binom{h+1}{h-1} (-f_{h-1})^2 + f_{h+2} \binom{h+2}{h-1} (-f_{h-1})^3 + \dots$$

y, por consiguiente $\text{ord}(f_{h-1}^{(1)}) \geq 2\text{ord}(f_{h-1}) > \text{ord}(f_{h-1})$. Esto concluye la demostración.

Referencias

- [CMR] F. Cano, R. Moussu y J.-P. Rolin: *Non-oscillating integral curves and valuations*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 582:107–141, 2005.
- [Can] J. Cano: *On the series defined by differential equations, with an extension of the Puiseux's Polygon construction to these equations*, Analysis, 13(1-2):103-119, 1993.
- [Hir] H. Hironaka: *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Annals of Mathematics (2), 79(1):109–203 y 79(2):205–326, 1964.
- [Spi] M. Spivakovsky: *A solution to Hironaka's polyhedra game*, pp. 419–432 en *Arithmetic and Geometry II*, Birkhauser, 1983.

Operadores de extensión para el problema de momentos de Stieltjes en los espacios de Gelfand-Shilov clásicos

Alberto Lastra

Tordesillas, 20 de junio de 2007

1. Notación

Un sector S del plano complejo será un conjunto de la forma

$$S = S(d, \theta, \rho) = \left\{ z : 0 < |z| < \rho, |\arg z - d| < \frac{\theta\pi}{2} \right\},$$

donde $d \in \mathbb{R}$, θ es un número real positivo, y ρ es, bien un número real positivo, bien ∞ . La cantidad d se conoce como la dirección de bisección del sector, $\theta\pi$ será su abertura o amplitud, y ρ su radio. En caso de que $\rho = \infty$ tendremos un sector no acotado.

Escribiremos

$$S_\theta := S\left(-\frac{\pi}{2}, \theta, \infty\right).$$

Sea S un sector. Diremos que T es un subsector propio de S si es un sector de forma que $\bar{T} - \{0\} \subseteq S$. Diremos que un subsector T de S es propio y acotado si es propio y posee radio finito, y lo representaremos por $T \prec S$.

Se denotará por $\mathcal{H}(S)$ al conjunto de funciones holomorfas en S .

Se denotará por $\mathbb{C}[[z]]$ al conjunto de series de potencias formales con coeficientes en \mathbb{C} ,

$$\mathbb{C}[[z]] = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m : a_m \in \mathbb{C} \text{ para cada } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Con las operaciones usuales de suma, producto por escalares complejos y producto de Cauchy, $\mathbb{C}[[z]]$ es una \mathbb{C} -álgebra con unidad, y los elementos invertibles son aquellos con $a_0 \neq 0$.

De ahora en adelante identificaremos los espacios $\mathbb{C}[[z]]$ y $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (en el que las operaciones se definen componente a componente) mediante el isomorfismo trivial.

Si A es un conjunto, la aplicación identidad en A se denotará por Id_A .

2. Preliminares

El problema de momentos fue inicialmente propuesto y resuelto por T.J. Stieltjes [Sti] a finales del siglo XIX. Numerosas variantes y generalizaciones se han obtenido desde entonces. Una de las versiones del problema fue resuelta por A.J. Durán en 1989:

Dada una sucesión arbitraria $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ de números complejos, existe una función f en el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de funciones complejas de decrecimiento rápido con soporte en $[0, \infty)$, y de modo que

$$\int_0^\infty f(x)x^n dx = a_n, \quad n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Para motivar el enfoque que daremos a nuestro problema, partiremos de resultados clásicos de interpolación y algunos refinamientos más recientes.

E. Borel [Bor] demostró en el año 1895 que dada una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales, existe una función f de clase \mathcal{C}^∞ en $[-1, 1]$ de modo que

$$f^{(n)}(0) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Así, la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \mathcal{C}^\infty([-1, 1]) &\longrightarrow \mathbb{C}^\mathbb{N} \\ f &\longrightarrow (f^{(n)}(0))_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

es sobreyectiva. Además, si dotamos a $\mathcal{C}^\infty([-1, 1])$ de la topología generada por la familia de seminormas

$$p_{\mathcal{C}^\infty([-1, 1])}^n = \max_{x \in [0, 1], 0 \leq j \leq n} |f^{(j)}(x)|, \quad n \in \mathbb{N},$$

$\mathcal{C}^\infty([-1, 1])$ tiene estructura de espacio de Fréchet, es decir, es un espacio vectorial topológico localmente convexo, metrizable (en particular, Hausdorff) y completo. Consideraremos la topología producto en $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ (y, de acuerdo con lo anterior, en $\mathbb{C}[[z]]$) que es la generada por la familia de seminormas $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, donde, para cada $k \in \mathbb{N}$, se define

$$t_k(a) = \max_{j \leq k} |a_j|, \quad a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

$\mathbb{C}^\mathbb{N}$ tiene estructura de espacio de Fréchet para dicha topología.

Es sencillo demostrar que la aplicación \mathcal{B} es lineal y continua para estos espacios.

Sin embargo, B.S. Mityagin [Mit], en 1961, probó la no existencia de una aplicación lineal y continua, inversa por la derecha de \mathcal{B} .

Teniendo en cuenta el resultado de Mityagin, el nuevo objetivo marcado sería conocer las clases de funciones no triviales en $\mathcal{C}^\infty([-1, 1])$ cuyas derivadas estuvieran sujetas a unas ciertas cotas (clases no quasianalíticas) para las cuales, la existencia de una inversa por la derecha para \mathcal{B} lineal y continua fuera posible. H.-J. Petzsche [Pet], en 1988, resolvió el problema caracterizando las clases de

funciones para las cuales la aplicación \mathcal{B} fuese sobreyectiva en el subespacio de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definido de forma natural por las cotas impuestas a la clase, y aquellos para los que \mathcal{B} admitiese inversa por la derecha lineal y continua.

Planteamos ahora un problema en la línea anterior, ahora en el contexto de las funciones que admiten desarrollo asintótico en sectores del plano complejo. Para ello, establecemos una serie de resultados previos.

Sea S un sector, una función $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, con $f \in \mathcal{H}(S)$, y una serie de potencias formal $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$.

Definición 1. Diremos que f admite desarrollo asintótico cuando z tiende a 0 en S si existe $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]$, que se denominará la serie de desarrollo asintótico de f , de modo que para todo $N \in \mathbb{N}$ y para todo $T \prec S$, existe una constante $c = c(N, T) > 0$ de forma que

$$|z|^{-N} \left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n \right| \leq c, \quad z \in T.$$

Se denotará por $f(z) \cong \hat{f}(z)$ en S .

Llamaremos $\mathcal{A}(S)$ al conjunto de las funciones $f \in \mathcal{H}(S)$ con desarrollo asintótico en S . Con las operaciones usuales de suma, producto por escalares, producto y derivación, $\mathcal{A}(S)$ será un álgebra diferencial. Además, la aplicación \mathcal{J} , que asocia a cada elemento de $\mathcal{A}(S)$ su desarrollo asintótico,

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \mathcal{A}(S) &\longrightarrow \mathbb{C}[[z]] \\ f &\longrightarrow \hat{f}, \end{aligned}$$

es un homomorfismo de álgebras diferenciales.

Introducimos a continuación una topología en $\mathcal{A}(S)$. Para ello tendremos en cuenta la siguiente equivalencia:

$$f \in \mathcal{A}(S) \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \forall T \prec S, \sup_{z \in T} |f^{(N)}(z)| < \infty \tag{1}$$

Fijados $T \prec S$ y $N \in \mathbb{N}$, para cada $f \in \mathcal{A}(S)$ se define

$$p_{N,T}(f) = \sup_{z \in T} |f^{(N)}(z)| < \infty.$$

$p_{N,T}$ es seminorma en $\mathcal{A}(S)$. Dotamos a $\mathcal{A}(S)$ de la topología dada por la familia de seminormas $(p_{N,T})_{N \in \mathbb{N}, T \prec S}$ con la que es un espacio de Fréchet.

Además, esta topología hace de la aplicación \mathcal{J} una aplicación continua. El teorema de Borel-Ritt afirma que, fijado un sector S , la aplicación \mathcal{J} es sobreyectiva. Por lo tanto, es posible establecer una aplicación $\mathcal{J}' : \mathbb{C}[[z]] \longrightarrow \mathcal{A}(S)$ tal que $\mathcal{J} \circ \mathcal{J}' = \text{Id}_{\mathbb{C}[[z]]}$. Surge de forma natural la pregunta: ¿Es posible

construir una aplicación con esta propiedad de forma que sea lineal y continua?. La prueba es análoga a la de Mityagin para el problema de Borel.

A la vista de este resultado, la siguiente cuestión consiste en determinar subespacios Γ y \mathcal{W} , de $\mathbb{C}[[z]]$ y $\mathcal{A}(S)$ respectivamente, dotados de topologías adecuadas, de forma que sea posible construir una aplicación $T : \Gamma \rightarrow \mathcal{W}$ lineal y continua tal que $\mathcal{J} \circ T = \text{Id}_\Gamma$.

Consideraremos el caso consistente en las funciones y desarrollos asintóticos denominados de Gevrey, que aparecen en numerosos contextos dentro de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones en derivadas parciales y distribuciones.

Definición 2. Sea α un número real con $\alpha \geq 1$. Diremos que una función $f \in \mathcal{H}(S)$ tiene a $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ como desarrollo asintótico Gevrey de orden α en S si para cada subsector propio y acotado T de S existen constantes $c, A > 0$ (que dependen de T) de forma que para cada $N \in \mathbb{N}$ y $z \in T$,

$$|z|^{-N} \left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n \right| \leq c A^N N!^{\alpha-1}.$$

Se denotará de la siguiente forma: $f \cong_\alpha \hat{f}$ en S .

Se llamará $\mathcal{A}_\alpha(S)$ al conjunto de todas las funciones $f \in \mathcal{H}(S)$ con desarrollo asintótico Gevrey de orden α en S . $\mathcal{A}_\alpha(S)$ es un álgebra diferencial.

Sean S un sector, $f \in \mathcal{H}(S)$ y $\alpha \geq 1$. En la misma línea que (1), se puede demostrar que:

$$f \in \mathcal{A}_\alpha(S) \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \forall T \prec S, \text{ existen constantes } c, A > 0 :$$

$$\sup_{z \in T} |f^{(N)}(z)| \leq c A^N N!^\alpha \text{ para cada } N \in \mathbb{N}.$$

De aquí se deduce que

$$|f_N| \leq c A^N (N!)^{\alpha-1}, \quad N \in \mathbb{N}$$

para las constantes anteriores. Llamaremos Γ_α al conjunto formado por las series de potencias formales que verifiquen dicha propiedad. Es sencillo probar que Γ_α es una subálgebra diferencial de $\mathbb{C}[[z]]$ para las operaciones usuales.

Además, si $f \in \mathcal{A}_\alpha(S)$ y $f \cong_\alpha \hat{f}$ en S , entonces $\hat{f} \in \Gamma_\alpha$. De hecho, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \mathcal{A}_\alpha(S) &\longrightarrow \Gamma_\alpha \\ f &\longrightarrow \hat{f} \end{aligned}$$

es un homomorfismo de álgebras diferenciales.

La sobreyectividad de esta aplicación pasa por conocer la amplitud del sector, en virtud del teorema siguiente:

Teorema 3. (Teorema de Borel-Ritt-Gevrey) [Bal]

Para cada $\alpha > 1$, sea $\hat{f} \in \Gamma_\alpha$ y S un sector de apertura a lo sumo $(\alpha - 1)\pi$. Entonces existe una función $f \in \mathcal{A}_\alpha(S)$ de forma que $f \cong_\alpha \hat{f}$ en S .

Por tanto, la aplicación \mathcal{J} es sobreyectiva si la apertura de S es menor o igual que $(\alpha - 1)\pi$.

Definición 4. Para cada $\alpha \geq 1$ y $A > 0$ se define

$$\Gamma_{\alpha,A} = \left\{ \hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \|\hat{f}\|_{\alpha,A} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|f_n|}{A^n n!^{\alpha-1}} < \infty \right\}.$$

Es sencillo comprobar que $\Gamma_{\alpha,A}$ es un espacio vectorial, $\|\cdot\|_{\alpha,A}$ es una norma en $\Gamma_{\alpha,A}$ y $(\Gamma_{\alpha,A}, \|\cdot\|_{\alpha,A})$ es un espacio de Banach.

Definición 5. Sea S un sector. Se define $\mathcal{W}_{\alpha,A}(S)$ como el espacio formado por las funciones $f \in \mathcal{H}(S)$ tales que

$$\|f\|_{\mathcal{W}_{\alpha,A}} := \sup_{z \in S, n \in \mathbb{N}} \frac{|f^{(n)}(z)|}{A^n n!^\alpha} < \infty.$$

$\mathcal{W}_{\alpha,A}(S)$ es un espacio vectorial complejo, siendo $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_{\alpha,A}}$ una norma en él. Además, $(\mathcal{W}_{\alpha,A}(S), \|\cdot\|_{\mathcal{W}_{\alpha,A}})$ es un espacio de Banach.

La condición de imponer cotas globales en todo el sector S no desvirtúa el espacio puesto que se tiene, para cada función con desarrollo asintótico en un sector S , cotas globales en cada subsector propio y acotado de S . Por lo tanto, podemos considerar la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \mathcal{W}_{\alpha,A}(S) &\longrightarrow \Gamma_{\alpha,A} \\ f &\longrightarrow \hat{f}. \end{aligned}$$

\mathcal{J} es lineal y continua.

La solución al problema de encontrar un operador de extensión para estos espacios fue dada por V. Thilliez [Thi] en 1995. Este resultado es mejorado por J. Sanz [San] en 2003, simplificando la demostración y ajustando de forma más eficaz la dependencia de los parámetros que aparecen.

Teorema 6. Sean $\alpha > 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$ con $0 < \theta < \alpha - 1$. Entonces existen constantes $c = c(\alpha, \theta) > 1$, $C = C(\alpha, \theta) > 0$ y, para cada $A \in (0, \infty)$, una aplicación lineal $\Delta_{A,\theta} : \Gamma_{\alpha,A} \rightarrow \mathcal{W}_{\alpha,cA}(S_\theta)$ de forma que para cada $\hat{f} \in \Gamma_{\alpha,A}$, se tiene que

$$\mathcal{J}(\Delta_{A,\theta}(\hat{f})) = \hat{f}, \quad \|\Delta_{A,\theta}(\hat{f})\|_{\mathcal{W}_{\alpha,cA}} \leq C \|\hat{f}\|_{\alpha,A}.$$

3. El problema

Llegamos por último al problema de momentos que nos concierne. Para ello, en primer lugar estableceremos los espacios en los que se va a trabajar.

Diremos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es de decrecimiento rápido si es de clase \mathcal{C}^∞ en \mathbb{R} y para cada $\beta, \gamma \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\beta D^\gamma f(x)| < \infty.$$

Denotaremos al conjunto de las funciones de decrecimiento rápido por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Claramente es un espacio vectorial con las operaciones usuales, y podemos dotarlo de estructura de espacio de Fréchet con la topología dada por la familia de seminormas $(q_{\beta,\gamma})_{\beta,\gamma \in \mathbb{N}}$ definidas por

$$q_{\beta,\gamma}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\beta D^\gamma f(x)|.$$

El conjunto $\mathcal{S}(0, \infty) = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ para todo } x \leq 0\}$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, y por lo tanto es un espacio de Fréchet con la topología de subespacio. A toda función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se le puede asociar la sucesión de momentos de f , $(\mu_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$, dada por

$$\mu_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)x^n dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Estas integrales son convergentes, lo que permite definir la aplicación $M : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ que a cada función le asocia su sucesión de momentos,

$$M(f) = (\mu_n(f))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Es sencillo probar que M es (lineal y) continua. De forma natural surge la siguiente cuestión: dada una sucesión arbitraria $\mu = (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ¿existe $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $M(f) = \mu$?

La respuesta es afirmativa, como fue probado por A.J. Durán [Dur] en 1989, y que hemos indicado al comienzo.

Sin embargo, al igual que ocurrió en el caso asintótico, se tiene que no existe una aplicación $T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{S}(0, \infty)$ lineal y continua tal que $M \circ T = \text{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$.

Interesa, por tanto, determinar subespacios de $\mathcal{S}(0, \infty)$ y de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, digamos Σ y Γ , respectivamente, de modo que, dotados de topologías adecuadas, permitan la construcción de operadores $T : \Gamma \rightarrow \Sigma$ lineales y continuos y tales que $M \circ T = \text{Id}_\Gamma$. Estos espacios serán los espacios de Gelfand-Shilov que introducimos a continuación.

Definición 7. Sea $\alpha > 0$. Consideramos el conjunto, que denotamos por \mathcal{S}_α , formado por las funciones $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tales que existe $A = A(f) > 0$ y para cada $\gamma \in \mathbb{N}$, existe $C_\gamma = C_\gamma(f) > 0$ de forma que para cada $\beta \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\beta D^\gamma f(x)| \leq C_\gamma A^\beta \beta!^\alpha.$$

\mathcal{S}_α es un subespacio vectorial para las operaciones usuales.

En la línea del resultado de Durán para el problema asintótico en sectores, S. Chung, D. Kim, Y. Yeom [CKY], en 1999, dieron el siguiente resultado:

Sea $\alpha > 2$. Existe $\phi \in \mathcal{S}_\alpha(0, \infty)$ de forma que

$$\mu_n = \int_0^\infty x^n \phi(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

si y sólomente si $\mu = (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma_{\alpha+1}$.

Sin embargo, no se da información sobre la continuidad de la aplicación de momentos restringida a estos espacios.

Para cada $\alpha > 0$ y $A > 0$ se define

$$\mathcal{S}_{\alpha,A} = \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \text{para cada } \gamma \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{N}} \frac{|x^\beta D^\gamma f(x)|}{A^\beta \beta!^\alpha} < \infty \right\}.$$

Obviamente, $\mathcal{S}_{\alpha,A}$ está contenido en \mathcal{S}_α y es un subespacio vectorial suyo.

En $\mathcal{S}_{\alpha,A}$, haciendo variar $\gamma \in \mathbb{N}$, se considerará la familia de seminormas $p_\gamma : \mathcal{S}_{\alpha,A} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$p_\gamma(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{N}} \frac{|x^\beta D^\gamma f(x)|}{A^\beta \beta!^\alpha}.$$

Se tiene entonces que $(\mathcal{S}_{\alpha,A}, (p_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{N}})$ es un espacio de Fréchet. Además, la topología dada en $\mathcal{S}_{\alpha,A}$ es más fina que la heredada desde $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

También se tendrá en cuenta

$$\mathcal{S}_{\alpha,A}(0, \infty) = \{f \in \mathcal{S}_{\alpha,A} : f(x) = 0 \text{ para cada } x \in (-\infty, 0]\}.$$

que, con la topología inducida de subespacio, es un espacio de Fréchet.

Definición 8. Dado $\alpha > 0$, \mathcal{S}^α estará formado por las funciones $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tales que existe $A = A(f) > 0$ y para cada $\beta \in \mathbb{N}$, existe $C_\beta = C_\beta(f) > 0$ de forma que para cada $\gamma \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\beta D^\gamma f(x)| \leq C_\beta A^\gamma \gamma!^\alpha.$$

Para cada $\alpha > 0$ y $A > 0$ definimos

$$\mathcal{S}^{\alpha,A} = \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \text{para cada } \beta \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{N}} \frac{|x^\beta D^\gamma f(x)|}{A^\gamma \gamma!^\alpha} < \infty \right\}.$$

$\mathcal{S}^{\alpha,A}$ es un subespacio vectorial de \mathcal{S}^α . Para cada $\beta \in \mathbb{N}$ se considera la seminorma $p^\beta : \mathcal{S}^{\alpha,A} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$p^\beta(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{N}} \frac{|x^\beta D^\gamma f(x)|}{A^\gamma \gamma!^\alpha}.$$

$(\mathcal{S}^{\alpha,A}, (p^\beta)_{\beta \in \mathbb{N}})$ es un espacio de Fréchet. A partir de estos espacios consideraremos

$$\mathcal{S}^{\alpha,A}(0, \infty) = \{f \in \mathcal{S}^{\alpha,A} : f(x) = 0 \text{ para cada } x \in (-\infty, 0]\},$$

que, con la topología inducida de subespacio, es un espacio de Fréchet.

Estudiamos a continuación cómo se comporta la aplicación M de momentos sobre los espacios $\mathcal{S}_{\alpha,A}$.

Proposición 9. Sean $\alpha > 0$ y $A > 0$. Existe $c = c(\alpha) > 1$ tal que para toda $f \in \mathcal{S}_{\alpha,A}$, se tiene que $M(f) \in \Gamma_{\alpha+1,cA}$, y la aplicación

$$\begin{aligned} M : \mathcal{S}_{\alpha,A}(0, \infty) &\longrightarrow \Gamma_{\alpha+1,cA} \\ f &\longrightarrow M(f) = (\mu_n(f))_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

es lineal y continua para las topologías descritas anteriormente para dichos espacios.

Nuestro objetivo será probar que, dados $A > 0$ y $\alpha > 2$, existen una constante $c > 1$ y una aplicación lineal y continua

$$T_{\alpha,A} : \Gamma_{\alpha+1,A} \longrightarrow \mathcal{S}_{\alpha,cA}(0, \infty),$$

de modo que $M \circ T_{\alpha,A} = \text{Id}_{\Gamma_{\alpha+1,A}}$.

Los enunciados que siguen a continuación están dedicados a determinar la forma en que opera la transformada de Fourier sobre los distintos espacios de Gelfand-Shilov que acabamos de introducir.

Definiremos la transformada de Fourier de una función medible $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt, \quad w \in \mathbb{R},$$

en el caso en el que la integral converja para cada $w \in \mathbb{R}$, lo cual está garantizado para funciones en el espacio $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

Como es sabido, para funciones de decrecimiento rápido la antitransformada de Fourier está definida por

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(w)e^{iwx} dw = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(g)(-x),$$

de modo que $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \text{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$.

Además, se puede demostrar que dados $\alpha \geq 1$ y $A > 0$, para cada $c > 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}_{\alpha,A} &\longrightarrow \mathcal{S}^{\alpha,cA} \\ \hat{f} &\longrightarrow f \end{aligned}$$

son aplicaciones lineales y continuas. También que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}^{\alpha,A} &\longrightarrow \mathcal{S}_{\alpha,A} \\ \hat{f} &\longrightarrow f \end{aligned}$$

son aplicaciones lineales y continuas.

La siguiente proposición caracteriza \mathcal{F} actuando sobre los elementos de $\mathcal{S}_\alpha(0, \infty)$.

Proposición 10. Sea ψ una función compleja definida en \mathbb{R} y sean $\alpha > 0$ y $A > 0$. Son equivalentes:

- (i) La función ψ es la transformada de Fourier de una función $\phi \in \mathcal{S}_{\alpha, c_1 A}(0, \infty)$ (para cierto $c_1 \geq 1$).
- (ii) Se dan las siguientes tres condiciones simultáneamente:
 - (ii.1) $\psi \in \mathcal{S}^{\alpha, c_2 A}$ para cierto $c_2 \geq 1$.
 - (ii.2) ψ puede extenderse a una función continua en el semiplano inferior $\bar{U} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z \leq 0\}$ y analítica en $U = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z < 0\}$.
 - (ii.3) Ψ se anula cuando $z \rightarrow \infty$ en \bar{U} .

Nuestro siguiente objetivo es establecer la continuidad de diversas transformaciones definidas entre diferentes espacios sujetos a acotaciones de tipo Gevrey, bien de series de potencias, bien de funciones con desarrollo asintótico, bien los espacios de Gelfand-Shilov. El primero de ellos se ocupa de una transformación entre espacios de sucesiones (o series) de Gevrey.

Proposición 11. Sean $\alpha > 2$ y $A > 0$. Sea $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia ρ estrictamente positivo (posiblemente infinito). Entonces existe $c > 1$ tal que para cada $\mu = (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma_{\alpha+1, A}$, la sucesión $T_1(\mu) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$b_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-i)^k}{k!} \mu_k a_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

es un elemento de $\Gamma_{\alpha, cA}$. Además, la aplicación

$$\begin{aligned} T_1 : \Gamma_{\alpha+1, A} &\longrightarrow \Gamma_{\alpha, cA} \\ \mu = (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longrightarrow b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \end{aligned}$$

es lineal y continua.

Introduciremos ahora una función que interviene en la construcción de la solución. Sea $\tau > 1$. En el conjunto $H = \mathbb{C} - \{iy : y \geq 1\}$ se define la función

$$h_\tau(z) = e^{\pi i(1 + \frac{1}{2\tau})} (z - i)^{1/\tau},$$

donde la determinación del logaritmo es la especificada por $\arg(z - i) \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Es claro que h_τ es holomorfa en U .

Definimos ahora la función $G_\tau : H \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$G_\tau(z) = \exp(h_\tau(z)), \quad z \in H. \tag{2}$$

G_τ es holomorfa y no se anula en H , luego $\frac{1}{G_\tau}$ es también analítica en H (y en particular en $B(0, 1)$).

Lema 12. Sea ε un número real tal que $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{\pi}{2}(\tau - 1), \frac{\pi}{2}\right\}$. Entonces $G_\tau(z)$ tiende a 0 cuando z tiende a ∞ en el sector

$$V_\varepsilon = \{z \in H : \arg(z - i) \in (-\pi - \varepsilon, \varepsilon)\}. \quad (3)$$

Observación 13. Sea $\theta > 1$. Es inmediato que $\mathbb{R} - \{0\} \subseteq S_\theta$. Por lo tanto, dada una función $\Psi \in \mathcal{W}_{\alpha, A}(S_\theta)$, con $\theta > 1$, podemos considerar $\psi = \Psi|_{\mathbb{R} - \{0\}}$. Dicha función ψ puede extenderse de forma \mathcal{C}^∞ a toda la recta real aplicando el teorema de los incrementos finitos.

En adelante, se entenderá que una función de este tipo, obtenida por restricción, ha sido ya extendida, considerándola como un elemento de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Consideremos, para θ y ε adecuados de modo que $S_\theta \subseteq V_\varepsilon$, la función G_τ introducida en (2). Se puede probar también que el producto de un elemento de $\mathcal{W}_{\alpha, A}(S_\theta)$ por G_τ es una función de un cierto espacio $\mathcal{W}_{\alpha, c_0 A}(S_\theta)$. Siguiendo la observación 13, la restricción de esta última a $\mathbb{R} - \{0\}$ se puede ver como una función de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Nuestro próximo resultado prueba que, de hecho, este proceso lleva del espacio $\mathcal{W}_{\alpha, A}(S_\theta)$ al espacio $\mathcal{S}^{\alpha, cA}$, de forma lineal y continua para cierto $c > 1$.

A partir de ahora consideraremos siempre sectores S_θ con $\theta > 1$, de forma que S_θ contenga a la recta real salvo el origen.

Proposición 14. Sean $\tau > 1$, $\theta > 1$, $\alpha \geq 1$ y $A > 0$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$S_\theta \subseteq V_\varepsilon = \{z \in H : \arg(z - i) \in (-\pi - \varepsilon, \varepsilon)\}$$

y sea $G_\tau : V_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida en (2). Entonces, existe $c > 1$ de forma que

1. Para cada $F \in \mathcal{W}_{\alpha, A}$ se tiene que $FG_\tau|_{\mathbb{R}} \in \mathcal{S}^{\alpha, cA}$, y
2. La aplicación

$$\begin{aligned} T_2 : \mathcal{W}_{\alpha, A}(S_\theta) &\longrightarrow \mathcal{S}^{\alpha, cA} \\ F &\longrightarrow T_2 F = (FG_\tau)|_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

es lineal y continua.

Observación 15. Se ha probado que, para cada $F \in \mathcal{W}_{\alpha, A}(S_\theta)$, $T_2 F = (FG_\tau)|_{\mathbb{R}} \in \mathcal{S}^{\alpha, cA}$. Ahora bien, si $U = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z < 0\}$, y dado que $\overline{U} - \{0\} \subseteq S_\theta$, podemos considerar (tras la extensión trivial) la función $(FG_\tau)|_{\overline{U}}$, que es continua en \overline{U} y analítica en U . Claramente, dicha función extiende a $T_2 F$, y verifica que

$$\lim_{z \rightarrow \infty, z \in \overline{U}} (FG_\tau)|_{\overline{U}}(z) = 0,$$

pues F está acotada en S_θ , por definición de $\mathcal{W}_{\alpha,A}(S_\theta)$, y

$$\lim_{z \rightarrow \infty, z \in \bar{U}} G_\tau(z) = 0$$

(ver lema 12). De acuerdo con la proposición 10, T_2F es la transformada de Fourier de una función en $\mathcal{S}_{\alpha,cA}(0, \infty)$, con c adecuado.

Estamos en situación de poder alcanzar el objetivo buscado.

Teorema 16. Sean $A > 0$, $\alpha > 2$. Existe $c > 1$ y una aplicación lineal y continua

$$T_{\alpha,A} : \Gamma_{\alpha+1,A} \longrightarrow \mathcal{S}_{\alpha,cA}(0, \infty)$$

de modo que para cada $\mu = (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma_{\alpha+1,A}$ se tiene que $M \circ T_{\alpha,A}(\mu) = \mu$.

Demostración:

Fijemos $\tau > 1$. Como se indicó en los comentarios previos al lema 12, la función $1/G_\tau$ es holomorfa en $B(0, 1)$. Sea $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ el desarrollo de Taylor de dicha función centrado en 0, y consideremos la constante, digamos $c_1 > 1$, y la aplicación T_1 introducidas en la proposición 11, asociadas a esta serie de potencias, de modo que

$$T_1 : \Gamma_{\alpha+1,A} \longrightarrow \Gamma_{\alpha,c_1A}$$

es la dada, para cada $\mu = (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma_{\alpha+1,A}$, por

$$(T_1\mu)_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-i)^k}{k!} \mu_k a_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Fijemos $\theta \in (1, \alpha - 1)$, y para los valores dados o determinados por α , A , θ y c_1 , sean $c_2 > 1$ y $\Delta_{c_1A,\theta}$, respectivamente, la constante y la aplicación determinadas en el teorema 6, de modo que

$$\Delta_{c_1A,\theta} : \Gamma_{\alpha,c_1A} \longrightarrow \mathcal{W}_{\alpha,c_2c_1A}(S_\theta).$$

A continuación, sean $c_3 > 1$ y la aplicación T_2 las determinadas, para los valores de α , A , θ , τ , c_1 y c_2 , en la proposición 14. En este caso,

$$T_2 : \mathcal{W}_{\alpha,c_2c_1A}(S_\theta) \longrightarrow \mathcal{S}^{\alpha,c_3c_2c_1A}.$$

Finalmente, sabemos que

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}^{\alpha,c_3c_2c_1A} \longrightarrow \mathcal{S}_{\alpha,c_3c_2c_1A}$$

es lineal y continua.

Si llamamos $c = c_3c_2c_1 > 1$, comprobaremos que la aplicación buscada es

$$T_{\alpha,A} = \mathcal{F}^{-1} \circ T_2 \circ \Delta_{c_1A,\theta} \circ T_1 : \Gamma_{\alpha+1,A} \longrightarrow \mathcal{S}_{\alpha,cA}(0, \infty).$$

De hecho, de acuerdo con la observación 15, la aplicación $T_{\alpha,A}$ aplica $\Gamma_{\alpha+1,A}$ en $\mathcal{S}_{\alpha,cA}(0, \infty)$. Además, $T_{\alpha,A}$ es lineal y continua por construcción. Probemos que para cada $\mu \in \Gamma_{\alpha+1,A}$ se tiene que $M \circ T_{\alpha,A}(\mu) = \mu$, o lo que es equivalente,

$$\int_0^\infty T_{\alpha,A}(\mu)(t) \cdot t^n dt = \mu_n \quad \text{para } n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Sea $\psi = T_2 \circ \Delta_{c_1A,\theta} \circ T_1(\mu)$, de modo que $\mathcal{F} \circ T_{\alpha,A}(\mu) = \psi$. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\psi(x) = \int_0^\infty T_{\alpha,A}(\mu)(t) e^{-ixt} dt,$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$ se deduce que

$$\psi^{(n)}(x) = (-i)^n \int_0^\infty t^n T_{\alpha,A}(\mu)(t) e^{-ixt} dt.$$

En particular,

$$\psi^{(n)}(0) = (-i)^n \int_0^\infty t^n T_{\alpha,A}(\mu)(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (4), habremos terminado si obtenemos que

$$\psi^{(n)}(0) = (-i)^n \mu_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A tenor de la definición de T_2 y de lo expuesto en la observación 13, esto último equivale a que la función $(\Delta_{c_1A,\theta} \circ T_1(\mu)) \cdot G_\tau$ admita la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-i)^n \mu_n}{n!} z^n$$

como desarrollo asintótico en S_θ . Ahora bien, el desarrollo asintótico de dicha función será la serie producto de Cauchy de los correspondientes desarrollos para $\Delta_{c_1A,\theta} \circ T_1(\mu)$ y G_τ . Por construcción de $\Delta_{c_1A,\theta}$, el desarrollo asintótico de $\Delta_{c_1A,\theta} \circ T_1(\mu)$ es precisamente el dado por $T_1(\mu)$, es decir,

$$\Delta_{c_1A,\theta} \circ T_1(\mu) \cong \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-i)^k}{k!} \mu_k a_{n-k} \right) z^n \quad \text{en } S_\theta.$$

Por otra parte, si $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ es el desarrollo de Taylor de $1/G_\tau$ en $B(0,1)$, es claro que la serie $\sum_{n=0}^\infty b_n z^n$, inversa formal de la anterior, será el desarrollo de Taylor en 0 (y el desarrollo asintótico en S_θ) de G_τ . Es inmediato, sin más que multiplicar ambos miembros de la igualdad por $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, que

$$\sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-i)^k}{k!} \mu_k a_{n-k} \right) z^n \cdot \sum_{n=0}^\infty b_n z^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-i)^n \mu_n}{n!} z^n,$$

con lo que concluimos. \square

Referencias

- [Bal] W. Balsler, *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations*, Springer 2000.
- [Bor] E. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Ann. Sci. ENS, ser. 3, vol. 12, pp. 9–55, 1895.
- [CKY] S.-Y. Chung, D. Kim, Y. Yeom, *Stieltjes moment problem for Gel'fand-Leontiev spaces*, Fractional Calculus and Applied Analysis, vol. 2, n° 5, pp. 263–269, 1999.
- [Dur] A.J. Durán, *The Stieltjes moments problem for rapidly decreasing functions*, Proc. AMS, vol. 107, n° 3, pp. 731–741, 1989.
- [Mit] B.S. Mityagin, *Approximate dimension and bases in nuclear spaces*, Russ. Math. Surv., vol. 16, n° 4, pp. 59–127, 1961.
- [Pet] H.-J. Petzsche, *On E. Borel's theorem*, Math. Ann., vol. 282, n° 2, pp. 299–313, 1988.
- [San] J. Sanz, *Linear continuous extension operators for Gevrey classes on polysectors*, Glasgow Mathematical Journal, vol. 45, n° 2, pp. 199–216, 2003.
- [Sti] T.J. Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, ser. 1, vol. 8, n° 4, pp. J1–J122, 1894. Cont. vol. 9, n° 1, pp. A5–A47, 1895.
- [Thi] V. Thilliez, *Extension Gevrey et rigidité dans un secteur*, Studia Math., vol. 117, n° 1, pp. 29–41, 1995.

Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias
Dpto. Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática

Espacios foliados: el punto de vista no conmutativo

Marta Macho Stadler

1. Introducción

En *matemática no conmutativa*, se procede del siguiente modo:

1. dado un objeto singular \mathcal{G} , se comienza encontrando una buena *desingularización* $\tilde{\mathcal{G}}$, que describa \mathcal{G} en el sentido a estudiar (medible, topológico, diferenciable, etc.). En muchos casos, $\tilde{\mathcal{G}}$ será un grupoide y el cociente del espacio de unidades de $\tilde{\mathcal{G}}$ por la acción del grupoide será \mathcal{G} (ver el apartado 2);
2. $\tilde{\mathcal{G}}$ debe tener *buenas* propiedades para poder definir un álgebra de funciones $C^*(\tilde{\mathcal{G}})$ cuya naturaleza refleje la de \mathcal{G} : éste es el objeto a estudiar.

Como primer ejemplo de espacio singular, y para ilustrar el anterior procedimiento, consideremos el caso de un grupo topológico Γ que actúa a derecha sobre un espacio topológico X por $\Phi : X \times \Gamma \rightarrow X$; entonces:

1. el cociente $\mathcal{G} = X/\Gamma$ es a menudo un espacio singular (no es de Hausdorff, su topología es la trivial, etc.). Su desingularización natural es el *grupoide producto* $\tilde{\mathcal{G}} = X \times \Gamma$, de espacio de unidades X , aplicaciones $s(x, \gamma) = \Phi(x, \gamma)$, $r(x, \gamma) = x$ y multiplicación $(x, \gamma')(\Phi(x, \gamma'), \gamma) = (x, \gamma'\gamma)$. El cociente de X por la acción del grupoide es $\mathcal{G} = X/\Gamma$;
2. la *C^* -álgebra producto cruzado* $C^*(\tilde{\mathcal{G}}) = C_0(X) \rtimes_{red} \Gamma$ es un espacio fácil de manipular y lleva *información topológica* sobre el cociente X/Γ , a través de su grupo de K-teoría.

En este trabajo se da un ejemplo de cómo se utiliza la topología no conmutativa en el estudio de los espacios de hojas de foliaciones. En los apartados 2 a 5 se explican sucintamente los actores de este proceso (grupoides de Lie, grupoides asociados a espacios foliados, C^* -álgebras de grupoides y K-teoría de C^* -álgebras), para terminar en el apartado 6 con la somera descripción de un ejemplo en el que estamos trabajando.

2. Desingularizando espacios de órbitas

2.1. Gruposoides

Definición 2.1.1. Un *grupoide (algebraico)*, $G \xrightarrow[r]{s} G^0$, está definido por:

1. un par de conjuntos (G^0, G) , donde $G^0 \subset G$ es el *espacio de unidades* y G es el *espacio total*,
2. dos aplicaciones sobreyectivas, $s, r : G \rightarrow G^0$, las *proyecciones origen y extremo* respectivamente, donde si $x \in G^0$, es $s(x) = r(x) = x$,
3. una biyección $i : G \rightarrow G$, la *inversión*, tal que $i = i^{-1}$ (se denota $i(\gamma) = \gamma^{-1}$),
4. una ley de composición parcial, $\cdot : G^2 \rightarrow G$, la *multiplicación*, donde $G^2 = \{(\gamma_2, \gamma_1) \in G \times G : s(\gamma_2) = r(\gamma_1)\}$ es el conjunto de los *pares componibles*, denotada del modo $\gamma_2 \cdot \gamma_1$ y verificando:
 - *Asociatividad*: si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in G$ son tales que $((\gamma_2, \gamma_1) \in G^2$ y $(\gamma_3, \gamma_2 \cdot \gamma_1) \in G^2)$ ó $((\gamma_3, \gamma_2) \in G^2$ y $(\gamma_3 \cdot \gamma_2, \gamma_1) \in G^2)$, entonces son ciertas las identidades $\gamma_3 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_1) = (\gamma_3 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1$,
 - *Unidades*: para cada $\gamma \in G$, es $(\gamma, s(\gamma)) \in G^2$ y $(r(\gamma), \gamma) \in G^2$, y entonces $\gamma \cdot s(\gamma) = \gamma = r(\gamma) \cdot \gamma$,
 - *Inversión*: para cada $\gamma \in G$, es $(\gamma, \gamma^{-1}), (\gamma^{-1}, \gamma) \in G^2$, y son válidas las identidades $\gamma \cdot \gamma^{-1} = r(\gamma)$ y $\gamma^{-1} \cdot \gamma = s(\gamma)$.

Ejemplos 2.1.2. Los primeros ejemplos de gruposoides son:

- (i) si G^0 es un punto, el grupoide se reduce a un *grupo*;
- (ii) dado un conjunto X y $G = X \times X$, el espacio de unidades es la diagonal de G (identificada con X), y se definen las operaciones $s(y, x) = x$, $r(y, x) = y$ y $(x, y)^{-1} = (y, x)$. El conjunto de los pares componibles es $G^2 = \{((y, x), (x, z)) : x, y, z \in X\}$ y la multiplicación está dada por $(y, x) \cdot (x, z) = (y, z)$: es el *grupoide grosero*;
- (iii) el *grafo de una relación de equivalencia* R sobre un conjunto X es un grupoide, donde el espacio de unidades es la diagonal y las operaciones se definen por $s(x, y) = x$, $r(x, y) = y$ y $(x, y)^{-1} = (y, x)$. El conjunto de los pares componibles es $G^2 = \{((x, y)(y, z)) \in G \times G : x, y, z \in X\}$ y la multiplicación $(x, y) \cdot (y, z) = (x, z)$.

Definición 2.1.3. Si $G \xrightarrow[r]{s} M$ es un grupoide y $x \in M$, la *s-fibra* sobre x es $G_x = \{\gamma \in G : s(\gamma) = x\}$ y la *r-fibra* sobre x es $G^x = \{\gamma \in G : r(\gamma) = x\}$. El conjunto $G_x^y = G_x \cap G^y$ puede ser vacío, para $x, y \in M$. Sin embargo, para cada $x \in M$, G_x^x es un grupo, el *grupo de isotropía* de G sobre x , cuyo elemento neutro es el punto x .

Definición 2.1.4. Un *subgrupoide* $G' \xrightarrow[r']{s'} M'$ del grupoide $G \xrightarrow[r]{s} M$ es un subconjunto $G' \subset G$, cerrado para la multiplicación y la inversión.

Definición 2.1.5. Un *morfismo de grupoides* de $G_1 \xrightarrow[r_1]{s_1} M_1$ en $G_2 \xrightarrow[r_2]{s_2} M_2$ es una función $f : G_1 \rightarrow G_2$, tal que si $(\gamma_2, \gamma_1) \in G_1^2$, entonces $(f(\gamma_2), f(\gamma_1)) \in G_2^2$, y en tal caso, se verifica la igualdad $f(\gamma_2 \cdot \gamma_1) = f(\gamma_2) \cdot f(\gamma_1)$.

A partir de ahora, el adjetivo *diferenciable* significará de clase C^∞ .

Definición 2.1.6. $G \xrightarrow[r]{s} M$ es un *grupoide topológico* (resp., *de Lie*), si:

1. G y M son espacios topológicos (resp., variedades diferenciables), donde M es de Hausdorff,
2. las funciones s, r, i y \cdot son continuas (resp., diferenciables); s, r son abiertas (resp., submersiones) e i es un homeomorfismo (resp., difeomorfismo).

El grupoide $G \xrightarrow[r]{s} M$ es *étale* si además r y s son homeomorfismos locales.

Ejemplos 2.1.7. Los ejemplos básicos de grupoides de Lie son:

- (i) *Acción de un grupo de Lie sobre una variedad:* Dada una acción diferenciable de un grupo de Lie conexo H sobre la variedad M , $\Phi : H \times M \rightarrow M$, queda definido un grupoide de Lie, de espacio total $G = H \times M$, espacio de unidades M y con las operaciones, $s(g, x) = x$, $r(g, x) = \Phi(g, x)$, $(g, x)^{-1} = (g^{-1}, \Phi(g, x))$ y si $x_2 = \Phi(g_1, x_1)$, la multiplicación está dada por $(g_2, x_2) \cdot (g_1, x_1) = (g_2 g_1, x_1)$.
- (ii) *Grupoide de homotopía de una variedad:* Dada M una variedad diferenciable, se considera el conjunto de los caminos sobre M , $\mathcal{P}(M)$, provisto de la topología compacto-abierta y sobre él se define la relación de equivalencia abierta: $\gamma \sim \gamma'$ si γ es homótopa a γ' con extremidades fijas. El cociente por esta relación, $\Pi_1(M) = \mathcal{P}(M) / \sim$, es un grupoide topológico localmente compacto, cuyo espacio de unidades es la variedad M (identificada con el conjunto de las clases de los caminos constantes) y donde la estructura de grupoide queda definida a través de las aplicaciones $s(\gamma) = \gamma(0)$, $r(\gamma) = \gamma(1)$ y la multiplicación y la inversión del grupoide se obtienen a partir de la composición y la inversión usual de caminos, respectivamente. La aplicación $(s, r) : \Pi_1(M) \rightarrow M \times M$ es un revestimiento, compatible con la topología cociente y hace de $\Pi_1(M)$ un grupoide de Lie. Si $x \in M$, $s : \Pi_1(M)_x \rightarrow M$ y $r : \Pi_1(M)_x \rightarrow M$ son los revestimientos universales de M y $\Pi_1(M)_x = \pi_1(M, x)$. El grupoide de Lie $\Pi_1(M) \xrightarrow[r]{s} M$, se llama *grupoide de homotopía* de M .

Definición 2.1.8. Dados $G_1 \xrightarrow[r_1]{s_1} M_1$ y $G_2 \xrightarrow[r_2]{s_2} M_2$ dos grupoides topológicos (resp., de Lie), un *homomorfismo* $f : G_1 \rightarrow G_2$ es una aplicación continua (resp., diferenciable) que es además un morfismo de grupoides.

2.2. Acciones de grupoides y equivalencias de Morita

Sea $G \xrightarrow[r]{s} M$ un grupoide de Lie y Z una variedad localmente compacta, eventualmente no Hausdorff, diferenciable y provista de una aplicación diferenciable, $\rho : Z \rightarrow M$. Sea $Z *_M G = \{(z, \gamma) \in Z \times G : \rho(z) = r(\gamma)\}$.

Definición 2.2.9. Una G -acción (a la derecha) sobre Z es una aplicación diferenciable $\Phi : Z *_M G \rightarrow Z$, $\Phi(z, \gamma) = z.\gamma$, tal que:

1. $\rho(z.\gamma) = s(\gamma)$, para cada $(z, \gamma) \in Z *_M G$,
2. si una de las expresiones $(z.\gamma).\gamma'$ ó $z.(\gamma.\gamma')$ está definida, la otra también lo está y coinciden,
3. para cada $z \in Z$, se tiene $z.\rho(z) = z$.

La órbita de $z \in Z$, bajo esta acción, $\{z.\gamma : \gamma \in G\}$, se denota por $G(z)$. Un G -espacio (a la derecha) es una variedad diferenciable Z , eventualmente no Hausdorff, con una G -acción diferenciable (a la derecha) dada.

Definición 2.2.10. Dados dos G -espacios (a la derecha) Z_1 y Z_2 , una G -aplicación es una función diferenciable $f : Z_1 \rightarrow Z_2$ y G -equivariante, es decir, si $(z_1, \gamma) \in Z_1 *_M G$, entonces $(f(z_1), \gamma) \in Z_2 *_M G$ y $f(z_1.\gamma) = f(z_1).\gamma$.

Definición 2.2.11. Si Z es un G -espacio (a la derecha), un G -fibrado vectorial sobre Z está definido por un G -espacio E y una G -aplicación, la *proyección*, $p : E \rightarrow Z$, tales que:

1. $p : E \rightarrow Z$ es un fibrado vectorial complejo,
2. para cada par $(z, \gamma) \in Z *_M G$, la aplicación $\phi : E_z \rightarrow E_{z.\gamma}$ dada por $\phi(u) = u.\gamma$ es lineal.

Definición 2.2.12. Un G -espacio (a la derecha) Z se dice *principal* si:

1. la aplicación $\Psi : Z *_M G \rightarrow Z \times Z$, dada por $\Psi(z, \gamma) = (z, z.\gamma)$ es propia, y
2. la acción es libre (dado $(z, \gamma) \in Z *_M G$, es $\gamma.z = z$ si y sólo si $\gamma \in M$).

En este caso, la proyección canónica $\pi : Z \rightarrow Z/G$ es una submersión y el cociente Z/G es un espacio localmente compacto y Hausdorff.

Ejemplo 2.2.13. Si $G \xrightarrow[r]{s} M$ es un grupoide de Lie y se eligen $Z = G$ y $\rho = s$, entonces $Z *_M G = G^2$. La multiplicación del grupoide es una G -acción natural (a la derecha) de G sobre sí mismo, que es libre y G es un G -espacio principal. Si $x \in M$, su órbita es $G(x) = G^x$.

Existen muy pocos isomorfismos (en el sentido obvio, ver la definición 2.1.8) entre grupoides; la siguiente noción de equivalencia entre grupoides es la más adecuada para estudiar las C^* -álgebras asociadas y la K-teoría inducida:

Definición 2.2.14. Una *equivalencia de Morita* entre dos grupoides de Lie

$$G_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{r_1} \end{array} M_1 \text{ y } G_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_2} \\ \xrightarrow{r_2} \end{array} M_2 \text{ está dada por:}$$

1. una variedad Z_f , eventualmente no Hausdorff, localmente compacta y diferenciable, provista de submersiones $r_f : Z_f \rightarrow M_1$ y $s_f : Z_f \rightarrow M_2$;
2. Z_f es un G_1 -espacio principal (a izquierda) y un G_2 -espacio principal (a derecha) respecto a r_f y s_f , y las dos acciones conmutan;
3. r_f induce un difeomorfismo entre Z_f/G_2 y M_1 y s_f induce un difeomorfismo entre $G_1 \backslash Z_f$ y M_2 .

Para más detalles sobre grupoides, puede consultarse [H84], [H85] y [MRW].

3. De foliaciones a grupoides

3.1. El grupoide de holonomía de una foliación

En todo lo que sigue, (M, \mathcal{F}) es una foliación de dimensión p y codimensión q sobre una variedad M de dimensión $n = p + q$. Sea $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ el conjunto de los caminos tangentes a \mathcal{F} (caminos cuya imagen está contenida en una hoja) provisto de la topología compacto-abierta, sobre el que se define la relación de equivalencia abierta:

$$\gamma \sim_h \gamma' \text{ si el gérmen de holonomía del lazo } (\gamma')^{-1} \cdot \gamma \text{ es trivial.}$$

El cociente por esta acción $Hol(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(\mathcal{F}) / \sim_h \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{r} \end{array} M$ es un grupoide topológico localmente compacto: el espacio de unidades es M (identificado con la clase de los caminos constantes) y la estructura de grupoide está definida por las aplicaciones abiertas $s(\gamma) = \gamma(0)$, $r(\gamma) = \gamma(1)$ y la multiplicación y la inversión están inducidas por la composición y la inversión usual de caminos, respectivamente.

Se trata además de un grupoide de Lie; la estructura diferenciable se da con todo detalle en [Win], pero se puede describir de manera concisa: si $\gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$, se consideran dos cubos distinguidos $U_i = P_i \times T_i$ ($i \in \{0, 1\}$), donde U_i es entorno de $\gamma(i)$, P_i es una placa y T_i es una transversal de \mathcal{F} . Salvo posibles restricciones de T_0 y T_1 , la trivialidad local de la foliación permite definir un difeomorfismo de holonomía $h_\gamma : T_0 \rightarrow T_1$, representado por un *tubo de caminos tangentes a \mathcal{F}* , $\widehat{h}_\gamma : T_0 \times [0, 1] \rightarrow M$. Este tubo está parametrizado por T_0 y la aplicación h_γ consiste en pasar del origen al extremo de cada uno de estos caminos. Por otro lado, \widehat{h}_γ se extiende a una familia diferenciable de caminos tangentes a \mathcal{F} , familia parametrizada por $P_0 \times T_0 \times P_1$, y que induce un difeomorfismo de U_0

sobre U_1 . Tras el paso a las clases de equivalencia, se obtiene una carta local sobre $Hol(\mathcal{F})$. El atlas así construido induce sobre $Hol(\mathcal{F})$ una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2p + q$. Como todos los objetos que definen la estructura de grupoide sobre $Hol(\mathcal{F}) \xrightarrow[r]{s} M$ son diferenciables, se trata de un grupoide de Lie: es el *grupoide de holonomía de la foliación*.

Si $x \in M$, $Hol(\mathcal{F})_x^x = h(\pi_1(L_x, x))$, donde $h : \pi_1(L_x, x) \rightarrow \text{Diff}(T_0, x)$ es la representación de holonomía de la hoja L_x pasando por x (es precisamente $h([\gamma]) = h_\gamma$). Las fibras de este grupoide son los revestimientos de holonomía de las hojas de la foliación \mathcal{F} . El cociente $Hol(\mathcal{F})^x / Hol(\mathcal{F})_x^x$ es difeomorfo a L_x , con lo que $Hol(\mathcal{F})$ (que en general no es Hausdorff) es el desingularizado natural del *espacio de hojas* de la foliación M/\mathcal{F} .

Si se restringe la foliación a un cubo distinguido, $U = P \times T$, donde P es una placa y T una transversal, entonces es $Hol(\mathcal{F}_U) = P \times P \times T$. De hecho, se obtiene una familia parametrizada por T de grupoides groseros (ejemplo 2.1.2 (ii)): ésta es la *propiedad de trivialidad local* del grupoide de holonomía.

El libro [CC] es un excelente texto donde se explica con detalle diversos aspectos de la teoría de espacios foliados.

3.2. Espacio de hojas y propiedades transversas

El estudio del espacio de hojas M/\mathcal{F} es un estudio de propiedades transversas de la foliación, por ello es útil introducir el siguiente concepto:

Definición 3.2.1. Una *subvariedad transversa* T es una subvariedad inmersa de M , de dimensión q , tal que T es transversa a cada hoja, es decir, en cada punto de T el espacio tangente de T es suplementario al espacio tangente a la hoja que pasa por este punto.

Definición 3.2.2. Sean $Hol(\mathcal{F}) \xrightarrow[r]{s} M$ el grupoide de holonomía de \mathcal{F} y T una *transversal total* (subvariedad transversa que corta cada hoja). Dado el conjunto $Hol(\mathcal{F})_T^T = \{\gamma \in Hol(\mathcal{F}) : s(\gamma), r(\gamma) \in T\}$, si se denotan por s_T y r_T la restricciones de s y r a $Hol(\mathcal{F})_T^T$, entonces $Hol(\mathcal{F})_T^T \xrightarrow[r_T]{s_T} T$ es un grupoide diferenciable, el *grupoide transverso* asociado a T . Como las aplicaciones s_T y r_T son difeomorfismos locales, $Hol(\mathcal{F})_T^T$ es además un *grupoide étale* (definición 2.1.6).

Existe una estrecha relación entre estos dos grupoides (ver [H58] y [H84]):

Proposición 3.2.3. *La inmersión natural $i_T : T \rightarrow M$ induce una equivalencia de Morita entre los grupoides $Hol(\mathcal{F})$ y $Hol(\mathcal{F})_T^T$.*

4. Topología no conmutativa

4.1. C*-álgebras

Definición 4.1.1. Una *C*-álgebra* A es un álgebra de Banach compleja, dotada de una involución $*$: $A \rightarrow A$, verificando con respecto a la norma de espacio de Banach, la relación $\|a^*a\| = \|a\|^2$. Un **-homomorfismo* entre dos C*-álgebras es un homomorfismo de álgebras que conmuta con la involución.

Ejemplos 4.1.2. Los ejemplos básicos de C*-álgebras son:

- (i) Si M es localmente compacto y Hausdorff, el álgebra de las funciones continuas sobre M , con valores complejos y nulas en el infinito,

$$C_0(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{C} : \forall \epsilon > 0, \exists K_\epsilon \text{ compacto: } |f(x)| < \epsilon, \text{ si } x \notin K_\epsilon\},$$

con la involución $f^*(x) = \overline{f(x)}$ es una C*-álgebra (conmutativa).

- (ii) Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert y $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ el álgebra de los operadores lineales acotados, con la involución dada por la operación de adjunción usual, entonces $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ es una C*-álgebra. Toda subálgebra autoadjunta y cerrada para la norma de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, es también una C*-álgebra, como por ejemplo, la subálgebra de los operadores compactos $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$.

Toda C*-álgebra puede pensarse como una subálgebra autoadjunta y cerrada para la norma de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, donde \mathcal{H} es un espacio de Hilbert:

Teorema de Gelfand-Naimark 4.1.3. *Para cada C*-álgebra A existe un espacio de Hilbert complejo \mathcal{H} y una isometría de A en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.*

La categoría de las C*-álgebras conmutativas y *-homomorfismos es dual de la de los espacios localmente compactos y aplicaciones continuas propias:

Teorema de Gelfand 4.1.4. *Toda C*-álgebra conmutativa A es de la forma $C_0(M)$, para un cierto espacio localmente compacto y Hausdorff M .*

4.2. Equivalencias de Morita

Dadas dos C*-álgebras, en general hay muy pocos *-homomorfismos entre ellas (y aún menos *-isomorfismos); de hecho, en muchos casos, el único *-homomorfismo que existe es la aplicación idénticamente nula. Por ello, se hace preciso introducir otra noción de equivalencia (ver [Weg]).

Definición 4.2.5. Sean A una C*-álgebra y \mathcal{E} un A -módulo a derecha. Se dice que \mathcal{E} es un *A-módulo de Hilbert*, si está provisto de un producto interior con valores en A , $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow A$, lineal con respecto a la segunda variable y antilineal con respecto a la primera, tal que, si $\xi, \eta \in \mathcal{E}$ y $a \in A$, entonces:

1. $\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle \eta, \xi \rangle_A^*$;
2. $\langle \xi, \eta a \rangle_A = \langle \xi, \eta \rangle_A a$ y $\langle \xi a, \eta \rangle_A = a^* \langle \xi, \eta \rangle_A$;

3. $\langle \xi, \xi \rangle_A \geq 0$ y $\langle \xi, \xi \rangle_A = 0$ si y sólo si $\xi = 0$;
4. la aplicación $n : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $n(\xi) = \|\langle \xi, \xi \rangle_A\|^{1/2}$ es una norma de espacio vectorial completo sobre \mathcal{E} .

El A -módulo de Hilbert \mathcal{E} es *lleno* si $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ genera A como ideal bilátero cerrado.

Definición 4.2.6. Una *equivalencia de Morita* entre A y B está definida por dos pares $(\mathcal{E}, \pi_{\mathcal{E}})$ y $(\mathcal{F}, \pi_{\mathcal{F}})$, tales que:

1. \mathcal{E} es un B -módulo de Hilbert a derecha y \mathcal{F} es un A -módulo de Hilbert a derecha,
2. $\pi_{\mathcal{E}} : A \rightarrow \mathcal{L}_B(\mathcal{E})$ y $\pi_{\mathcal{F}} : B \rightarrow \mathcal{L}_A(\mathcal{F})$ son $*$ -homomorfismos,
3. $\mathcal{E} \otimes_B \mathcal{F}$ es un A -módulo isomorfo a A y $\mathcal{F} \otimes_A \mathcal{E}$ es un B -módulo isomorfo a B .

4.3. La C^* -álgebra de un grupoide

Comenzamos dando una generalización de la noción de medida de Haar para grupos:

Definición 4.3.7. Sean G un grupoide localmente compacto y $C_c(G)$ el espacio vectorial de las funciones complejas de soporte compacto en G . Un *sistema de Haar a izquierda* es un conjunto de medidas $\{\lambda^u \mid u \in G^0\}$ verificando las siguientes propiedades:

1. el soporte de la medida λ^u es $s^{-1}(u)$;
2. *continuidad*: para $f \in C_c(G)$, la función $\lambda(f) : G^0 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\lambda(f)(u) = \int f d\lambda^u$ es continua;
3. *invariancia a izquierda*: $\int f(x.y) d\lambda^{s(x)}(y) = \int f(y) d\lambda^{r(x)}(y)$, para cada $x \in G$ y $f \in C_c(G)$.

Sobre $C_c(G)$ se define la convolución $f * g(x) = \int f(x.y)g(y^{-1})d\lambda^{s(x)}(y)$ y la involución $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$, que le dotan de estructura de $*$ -álgebra. Además, si K es compacto en G , queda definida una *seminorma* sobre $C_c(G)$ por $\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$ y se obtiene la *topología límite inductivo* sobre $C_c(G)$ ($f_n \rightarrow f \iff \|f - f_n\|_K \rightarrow 0$ para cada compacto $K \subset G$).

Dado \mathcal{H} un espacio de Hilbert, para cada $x, y \in \mathcal{H}$ se tiene la *seminorma* $\|u\|_{x,y} = |\langle u(x), y \rangle|$. La *topología débil de operadores* sobre $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ es la generada por estas seminormas ($\{A_n\} \rightarrow A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \iff \{\langle A_n(x), y \rangle\} \rightarrow \langle A(x), y \rangle$ para $x, y \in \mathcal{H}$).

Utilizando las topologías recién descritas, se define:

Definición 4.3.8. Dado un grupoide localmente compacto y Hausdorff G con un sistema de Haar a izquierda $\{\lambda^u\}_{u \in G^0}$, una *representación* de $C_c(G)$ en \mathcal{H} es un $*$ -homomorfismo $\pi : C_c(G) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ tal que el espacio generado por $\{\pi(f)(x) : f \in C_c(G), x \in \mathcal{H}\}$ es denso en \mathcal{H} .

Para cada $u \in G^0$, sean $\mathcal{H}_u = L^2(s^{-1}(u), \lambda^u)$ y la *representación reducida* $\pi_u : C_c(G) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}_u)$, dada por $(\pi_u(f)(\phi))(x) = \int_{r^{-1}(u)} f(x.y)\phi(y^{-1})d\lambda^u(y)$, donde $f \in C_c(G)$, $\phi \in L^2(s^{-1}(u), \lambda^u)$ y $x \in s^{-1}(u)$. Se define entonces:

Definición 4.3.9. La *norma reducida* sobre $C_c(G)$ se define por $\|f\|_{\text{red}} = \sup\{\|\pi_u(f)\|_{\text{op}} : u \in G^0\}$, y la *compleción* de $C_c(G)$ respecto a ella, $C_{\text{red}}^*(G)$, es la *C*-álgebra reducida* de G .

La equivalencia de Morita pasa de grupoides a C*-álgebras:

Proposición 4.3.10. Si $G_1 \xrightarrow[r_1]{s_1} M_1$ y $G_2 \xrightarrow[r_2]{s_2} M_2$ son *grupoides Morita-equivalentes*, entonces $C_{\text{red}}^*(G_1)$ y $C_{\text{red}}^*(G_2)$ son *C*-álgebras Morita-equivalentes*.

Para más detalles, ver [Con], [R80], [R82] y [Rie].

4.4. La C*-álgebra de una foliación

Sea (M, \mathcal{F}) una foliación de dimensión p y codimensión q sobre una variedad M de dimensión $n = p + q$. La C*-álgebra de la foliación, $C^*(M, \mathcal{F})$, se define precisamente como la C*-álgebra reducida de su grupoide de holonomía, $C_{\text{red}}^*(\text{Hol}(\mathcal{F}))$. A continuación, se da un listado de las propiedades más importantes, que pueden consultarse en [Con].

La construcción de $C^*(M, \mathcal{F})$ es local en el siguiente sentido:

Proposición 4.4.11. Si $U \subset M$ es abierto, $\text{Hol}(\mathcal{F}_U)$ es un subgrupoide abierto de $\text{Hol}(\mathcal{F})$. La inclusión $C_c(\text{Hol}(\mathcal{F}_U)) \subset C_c(\text{Hol}(\mathcal{F}))$ se extiende a un *-isomorfismo isométrico de $C^*(U, \mathcal{F}_U)$ en $C^*(M, \mathcal{F})$.

La C*-álgebra de (M, \mathcal{F}) es estable:

Proposición 4.4.12. $C^*(M, \mathcal{F}) \otimes \mathfrak{K} \cong C^*(M, \mathcal{F})$.

$C^*(M, \mathcal{F})$ sólo depende de la estructura transversa de la foliación:

Teorema 4.4.13. Si T es una transversal total, las C*-álgebras $C^*(M, \mathcal{F})$ y $C_{\text{red}}^*(\text{Hol}_T^T)$ son Morita-equivalentes.

Teorema 4.4.14. Si (M_1, \mathcal{F}_1) y (M_2, \mathcal{F}_2) son foliaciones topológicamente equivalentes, entonces $C^*(M_1, \mathcal{F}_1) \otimes \mathfrak{K} \cong C^*(M_2, \mathcal{F}_2) \otimes \mathfrak{K}$.

Muchas propiedades de (M, \mathcal{F}) se pueden leer a través de $C^*(M, \mathcal{F})$:

Proposición 4.4.15. Si $\text{Hol}(\mathcal{F})$ es de Hausdorff, se verifica:

1. $C^*(M, \mathcal{F})$ es simple (es decir, no posee ideales no triviales) si y sólo si toda hoja de \mathcal{F} es densa;
2. la foliación \mathcal{F} es cerrada si y sólo si $C^*(M, \mathcal{F})$ posee a \mathfrak{K} como cociente.

Ejemplos 4.4.16. Algunos ejemplos de C^* -álgebras de foliaciones son:

- (i) si M es localmente compacto y está foliado por puntos, entonces $Hol(\mathcal{F}) = M$ y $C^*(M, \mathcal{F}) = C_0(M)$;
- (ii) si M es localmente compacto y M es una variedad foliada por una única hoja, entonces $Hol(\mathcal{F}) = M \times M$. Un sistema de Haar es una medida λ de soporte M . Los elementos de la subálgebra densa de la definición pueden realizarse como operadores integrales con núcleo de soporte compacto sobre $L^2(M, \lambda)$ y su completación $C^*(M, \mathcal{F})$ es $\mathfrak{K}(L^2(M, \lambda))$;
- (iii) si la foliación viene dada por una fibración $F^p \rightarrow M \rightarrow B^q$ (F conexo), entonces M está foliada por las fibras sobre B . Las hojas son cerradas y difeomorfas a F , $Hol(\mathcal{F})$ es el grafo de la relación de equivalencia asociada a la partición de M en hojas y $C^*(M, \mathcal{F}) \simeq C_0(B, \mathfrak{K}(L^2(F)))$;
- (iv) si la foliación proviene de una acción de un grupo de Lie Γ y $Hol(\mathcal{F}) \simeq M \times \Gamma$ (este isomorfismo no es siempre cierto), entonces $C^*(M, \mathcal{F})$ es la C^* -álgebra producto cruzado $C_0(M) \rtimes_{red} \Gamma$.

5. El regreso a la topología

5.1. La K-teoría topológica de Atiyah

Dado un espacio compacto M , si se denota por $V(M)$ el conjunto de las clases de isomorfismo de fibrados vectoriales complejos localmente triviales de base M , V es un functor contravariante de la categoría de los espacios compactos en la categoría de los semigrupos abelianos, invariante por homotopía. $K^0(M)$ se define como el grupo de Grothendieck de $V(M)$, y continúa siendo un functor contravariante, ahora de la categoría de los espacios compactos en la de los grupos abelianos. Esta definición se generaliza a M localmente compacto, por paso al compactificado de Alexandroff.

La *suspensión reducida* de orden n de M se define como el espacio no compacto $S^n(M) = M \times \mathbb{R}^n$, y su *K-grupo* de orden n es entonces $K^n(M) = K^0(S^n(M))$ (para más detalles ver [Bla] o [Weg]).

Proposición 5.1.1. Sean M un espacio localmente compacto, E un fibrado vectorial complejo sobre M y $\Gamma(M, E)$ el conjunto de las secciones continuas de E . Entonces:

1. $\Gamma(M, E)$ es un módulo sobre el anillo de las funciones continuas de M con valores complejos $C(M)$ (es proyectivo de tipo finito si M es compacto);
2. un isomorfismo de fibrados vectoriales complejos induce un isomorfismo entre los módulos de secciones correspondientes;
3. si E es el fibrado trivial de dimensión n , entonces $\Gamma(M, E) \simeq C(M)^n$.

Así, Γ es un functor covariante de la categoría de los fibrados vectoriales complejos sobre un espacio compacto y Hausdorff M , en la categoría de los módulos proyectivos de tipo finito sobre $C(M)$, y se puede incluso probar que Γ es biyectiva: este resultado tiene una gran importancia, puesto que existe una generalización natural en el caso no conmutativo, que se explica a continuación.

5.2. La K-teoría analítica

Si la K-teoría topológica es una teoría de cohomología generalizada para fibrados vectoriales, la K-teoría de álgebras de operadores lo es para ciertas matrices (los *proyectores* sobre una C^* -álgebra (ver [Bla] ó [Weg]).

Definición 5.2.2. Sea A una C^* -álgebra. Los elementos idempotentes ($p^2 = p$) y autoadjuntos ($p = p^*$), se denominan *proyectores*, y se denotan por $\mathcal{P}(A)$. Dos proyectores p, q sobre A son *equivalentes*, $p \sim q$, si existe $u \in A$ verificando $p = uu^*$ y $q = u^*u$. Se trata de una relación de equivalencia sobre A , y la clase de un elemento se denota por $[p]$.

Definición 5.2.3. Un *sistema dirigido de álgebras*, $\{A_i, \phi_{ij}\}_{i,j \in I}$, es una familia de álgebras A_i y morfismos inyectivos $\phi_{ij} : A_i \rightarrow A_j$, que inducen una relación de orden sobre las álgebras: $A_i \leq A_j$ si y sólo si $\phi_{ij} : A_i \rightarrow A_j$. En particular, dados $i, j \in I$, existe $k \in I$, tal que $\phi_{ik} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}$.

Definición 5.2.4. Dado un sistema dirigido de álgebras $\{A_i, \phi_{ij}\}_{i,j \in I}$, su *límite inductivo*, $\varinjlim_i A_i$ ($\phi_j : \varinjlim_i A_i \rightarrow A_j$ es un homomorfismo para cada j), es el

álgebra que cumple la siguiente propiedad universal: toda aplicación del sistema $\{A_i, \phi_{ij}\}_{i,j \in I}$ en un álgebra B (es decir, toda familia de morfismos $\{\psi_i : A_i \rightarrow B\}_i$ tales que $\psi_j \circ \phi_{ij} = \psi_i$), factoriza a través de $\varinjlim_i A_i$, es decir, existe $\theta :$

$$\varinjlim_i A_i \rightarrow B \text{ tal que } \psi_j \circ \phi_{ij} = \theta \circ \phi_i.$$

Sea el sistema dirigido de matrices con valores en A , $\{\mathbb{M}_n(A), i_{nm}\}$, donde $i_{nm} : \mathbb{M}_n(A) \rightarrow \mathbb{M}_m(A)$ es la inclusión natural, para $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \leq m$. Denotamos $\mathbb{M}_\infty(A) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{M}_n(A)$, cuya completación es $A \otimes \mathfrak{K}$ (ver [Bla] y [Weg]).

Si A es unitaria y $V(A) = \{[p] : p \in \mathbb{M}_\infty(A), p = p^* = p^2\}$, se desea dotar a $V(A)$ de estructura de semigrupo abeliano; pero la suma de proyectores (salvo que sean ortogonales) no es necesariamente un proyector. Puesto que trabajamos con clases de equivalencia, podríamos pensar en encontrar para dos proyectores p y q , una expresión del tipo $[p] + [q] = [r \oplus s]$, donde r y s son proyectores ortogonales y equivalentes a p y q , respectivamente. La ventaja de trabajar en $\mathbb{M}_\infty(A)$ es que r y s son fácilmente identificables: basta tomar $r = \text{diag}(p, 0)$ y $s = \text{diag}(0, q) \sim \text{diag}(q, 0)$. En consecuencia, $[p] + [q] = [\text{diag}(p, q)] = [\text{diag}(q, p)]$ (donde $\text{diag}(p, q)$ es la matriz diagonal por bloques $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$), y entonces es evidente el siguiente resultado:

Proposición 5.2.5. $(V(A), +)$ es un semigrupo abeliano.

Si $K_0(A)$ es el grupo de Grothendieck del semigrupo $V(A)$, se deduce:

Proposición 5.2.6. K_0 es un functor covariante entre las categorías de las C^* -álgebras unitarias y $*$ -homomorfismos en la de los grupos abelianos y homomorfismos.

Observación 5.2.7. Se puede extender esta definición a C^* -álgebras no necesariamente unitarias.

Definición 5.2.8. Dada una C^* -álgebra A , su *suspensión* es la C^* -álgebra $SA = \{f \in C([0, 1], A); f(0) = 0 = f(1)\}$, con las operaciones puntuales y la norma del supremo, donde $C([0, 1], A)$ es la familia de funciones continuas de $[0, 1]$ con valores en A . Y el K -grupo de orden n sobre A es $K_n(A) = K_0(S^n A)$.

Esta teoría generaliza la K -teoría topológica de Atiyah:

Teorema de Swan 5.2.9. Si M es un espacio localmente compacto, su grupo de K -teoría analítica $K_j(C_0(M))$ es naturalmente isomorfo al grupo de K -teoría topológica $K^j(M)$.

Se destacan algunas de las propiedades de grupos de K -teoría:

Teorema 5.2.10. Dada una C^* -álgebra A , se verifica:

1. K_n es un functor covariante de la categoría de las C^* -álgebras y $*$ -homomorfismos en la de los grupos abelianos y homomorfismos;
2. *continuidad*: dado un sistema dirigido de C^* -álgebras, $\{A_i, \phi_{ij}\}_{i,j \in I}$, la familia $\{K_n(A_i), \phi_{ij}^*\}_{i,j \in I}$ es un sistema dirigido de grupos y

$$K_n(\varinjlim_i A_i) = \varinjlim_i K_n(A_i);$$

3. *estabilidad de K_n* : dada una C^* -álgebra A , $K_n(A) \simeq K_n(A \otimes \mathfrak{K})$. En particular, si A y B son establemente isomorfos (es decir $A \otimes \mathfrak{K} \simeq B \otimes \mathfrak{K}$), entonces $K_n(A) \simeq K_n(B)$;
4. *periodicidad de Bott*: para cada C^* -álgebra A , $K_n(A) \simeq K_{n+2}(A)$, es decir, salvo isomorfismo, sólo existen K -grupos en dimensiones 0 y 1;
5. *dadas dos C^* -álgebras A y B* , es $K_n(A \oplus B) \simeq K_n(A) \oplus K_n(B)$;
6. *equivalencia de Morita*: si A y B son C^* -álgebras Morita-equivalentes, sus grupos de K -teoría son isomorfos.

En particular, con las notaciones anteriores, y como consecuencia de la proposición 4.4.13 y del teorema 5.2.10, se deduce:

Corolario 5.2.11. Si T es una transversal total en el espacio foliado (M, \mathcal{F}) , entonces $K_*(C^*(M, \mathcal{F}))$ y $K_*(C_{red}^*(Hol_T^T))$ son grupos isomorfos.

La ventaja de esta propiedad es que se pueden obtener propiedades de la foliación trabajando únicamente sobre una transversal total, espacio de dimensión menor, y por lo tanto más sencillo de manipular.

5.3. K-teoría ordenada

Definición 5.3.12. Un par (H, H^+) es un grupo abeliano ordenado si H es un grupo abeliano y el cono positivo $H^+ \subset H$ es tal que

1. $H^+ + H^+ \subseteq H^+$;
2. $H^+ \cap -H^+ = \{0\}$;
3. $H^+ - H^+ = H$.

Sobre un grupo abeliano ordenado existe un orden parcial natural (por 1. y 2.), dado por $x \leq y \iff y - x \in H^+$.

En nuestro caso, sea $\kappa_A : V(A) \rightarrow K_0(A)$ la aplicación $\kappa_A([p]) = [p] - [0]$ y $K_0(A)^+ = \kappa_A(V(A))$, que no es en general un cono positivo.

Hay un tipo de C^* -álgebras que verifican propiedades especialmente buenas en K-teoría:

Definición 5.3.13. Una C^* -álgebra A es una AF-álgebra si es límite inductivo de una sucesión creciente de C^* -álgebras de dimensión finita.

Observación 5.3.14. Toda C^* -álgebra de dimensión finita es isomorfa a una suma de matrices $M_{k_1}^n(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{k_n}^n(\mathbb{C})$, para $k_j \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 5.3.15. El álgebra de los operadores compactos sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} es una AF-álgebra, ya que $\mathfrak{K}(\mathcal{H}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(\mathbb{C})$.

Y se verifica que:

Proposición 5.3.16. Si A es una C^* -álgebra AF, entonces $K_0(A)^+$ tiene cancelaciones y se concluye que $(K_0(A), K_0(A)^+)$ es un grupo ordenado.

Observación 5.3.17. $(K_0(A), K_0(A)^+)$ preserva sumas directas, límites inductivos, etc.

Proposición 5.3.18. Toda C^* -álgebra AF, A , es separable. Así, $K_0(A)$ es contable y además $K_1(A) = 0$.

La estructura de orden para los grupos K_0 puede ayudar a distinguir C^* -álgebras que la K-teoría analítica K_0 no es capaz de diferenciar:

Ejemplo 5.3.19. Es fácil probar que $K_0(\mathbb{C}^2) \simeq \mathbb{Z}^2 \simeq K_0(C_0(\mathbb{S}^2))$, con lo que la K-teoría no distingue entre la esfera \mathbb{S}^2 y el espacio formado por dos puntos ($\mathbb{C}^2 = C_0(\{a\} \cup \{b\})$). Sin embargo, puede probarse que $K_0(\mathbb{C}^2)^+ = \mathbb{N}^2$ y $K_0(C_0(\mathbb{S}^2))^+ = \{(0, 0)\} \cup \{(m, n) : m > 0\}$.

De hecho, G. Elliot demuestra (ver [Ell]) que la K-teoría ordenada de las AF-álgebras es un invariante completo, es decir, dos C^* -álgebras AF son isomorfas si y sólo si sus grupos ordenados K_0 lo son.

6. Algunos ejemplos de aplicación

Hay diferentes trabajos que explican como se utilizan los anteriores conceptos en el estudio de espacios foliados. Por ejemplo, en [Hec] y [Mac] se explica como estas herramientas pueden ayudar a verificar la llamada conjetura de Baum-Connes para espacios foliados, propiedad que permite obtener información sobre la dinámica topológica de la foliación. Otro tipo de aplicaciones, no sólo en espacios foliados, aparecen en [Con].

A continuación, se describe sucintamente un ejemplo en el que estamos aún trabajando (ver [ALM] y [Loz]), y en el que se incorpora la herramienta de la K-teoría ordenada.

Las propiedades del espacio foliado de Gromov-Hausdorff $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ se estudian a través de su espacio de hojas, X/\mathcal{R} , donde $X = \overline{L_\infty}$ (L_∞ es la hoja que contiene al árbol repetitivo y aperiódico T_∞) es una transversal total (un Cantor) y $\mathcal{R} = \mathcal{L}|_X$. Se puede demostrar que la relación \mathcal{R} , provista de una topología adecuada, es el grupoide de holonomía (que es *étale*) de $\mathcal{L}|_X$.

Por la dificultad en la descripción de X/\mathcal{R} , su estudio no conmutativo se hace sobre una subrelación maximal y AF de \mathcal{R} , \mathcal{R}_∞ : se construye como límite inductivo de subrelaciones finitas encajadas (es AF), abiertas cada una en la siguiente (\mathcal{R}_∞ es *abierta* en \mathcal{R}), étales y compactas de \mathcal{R} .

\mathcal{R}_∞ es suficientemente grande como para proporcionar una *buena* información sobre \mathcal{R} , y al ser una subrelación abierta en \mathcal{R} , es $C_c(\mathcal{R}_\infty) \hookrightarrow C_c(\mathcal{R})$. Como la relación \mathcal{R}_∞ es AF, se puede demostrar que su C^* -álgebra $C^*(\mathcal{R}_\infty)$ también lo es, es decir, es límite inductivo de álgebras de dimensión finita (ver la definición 5.3.13).

En [Loz] (aquí no se puede describir este proceso pues hay demasiados detalles que concretar) se describe la K-teoría ordenada de la subrelación \mathcal{R}_∞ gracias a las propiedades anteriormente descritas, lo que proporciona información sobre la dinámica topológica del espacio foliado de Gromov-Hausdorff.

Referencias

- [ALM] F. Alcalde Cuesta, A. Lozano Rojo y M. Macho Stadler, *Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon*, enviado para publicar.
- [Bla] B. Blackadar, *K-theory for Operator Algebras*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **5**, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [CC] A. Candel y L. Conlon, *Foliations*, Graduate Studies in Mathematics **23**, AMS, 2000.
- [Con] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.
- [Ell] G. Elliot, *On the classification of inductive limits of sequences of semi-simple finite-dimensional algebras*, Journal of Algebra **38**, 29–44, 1976.

- [H58] A. Haefliger, *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes*, Comm. Math. Helv. **32**, 248–329, 1958.
- [H84] A. Haefliger, *Groupoïdes d’holonomie et classifiants*, Astérisque **116**, 70–97, 1984.
- [H85] A. Haefliger, *Pseudogroups of local isometries*, Res. Notes in Math. **131**, 174–197, 1985.
- [Hec] G. Hector, *Groupoïdes, feuilletages et C^* -algèbres (quelques aspects de la conjecture de Baum-Connes)*, Geometric study of foliations (Tokyo, 1993), World Sci. Publ., 3–34, 1994.
- [Loz] A. Lozano Rojo, *Dinámica topológica, teoría ergódica y geometría no conmutativa de grafos repetitivos*, Tesis doctoral UPV/EHU.
- [Mac] M. Macho Stadler, *La Conjetura de Baum-Connes en la Teoría de Foliaciones*, Rev. Semin. Iberoam. Mat. **2** (IV), 57–85, 1999.
- [MRW] P.S. Mulhy, J. Renault y D.P. Williams, *Equivalence and isomorphism for groupoid C^* -algebras*, J. Operator Theory **17**, 3–22, 1987.
- [R80] J. Renault, *A groupoid approach to C^* -algebras*, Lecture Notes in Mathematics **793**, Springer, 1980.
- [R82] J. Renault, *C^* -algebras of groupoids and foliations*, Proc. Symposia Pure Maths. **38**, 339–350, 1982.
- [Rie] M.A. Rieffel, *Morita equivalence for operator algebras*, Proc. Symposia Pure Maths. **38**, 285–298, 1982.
- [Win] H.E. Winkelkemper, *The graph of a foliation*, Ann. Global Analysis and Geometry **3**, 51–75, 1983.
- [Weg] N. E. Wegge-Olsen, *K -theory and C^* -algebras*, Oxford University Press, 1993.

Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Barrio Sarriena s/n
48940 Leioa
e-mail: marta.macho@ehu.es

Investigación parcialmente financiada por UPV-EHU 00127.310-E-15916 y EHU 06/05

La topología de las hojas de ciertas foliaciones singulares

David Marín

Tordesillas, 18 de febrero de 2005

1. Una breve introducción histórica

El estudio de la topología de las singularidades de variedades analíticas complejas ha sido ampliamente tratado. Entre muchos autores podemos citar a D. Mumford, a cuyo trabajo [Mum61] sobre las singularidades de superficies nos referiremos en breve, y a J. Milnor (cf. [Mil68]) quien introdujo la célebre fibración que lleva su nombre para estudiar singularidades de hipersuperficies en dimensión cualquiera.

En dimensión dos, un problema más general y de difícil análisis es el estudio topológico de gérmenes de foliaciones singulares. En este campo, los trabajos de C. Camacho, A. Lins Neto y P. Sad [CS82, CLNS84] supusieron un avance considerable en dicha dirección. En efecto, en el primero de ellos se demuestra la célebre fórmula del índice, a partir de la cual se obtiene como corolario la existencia de separatrices. En el segundo se obtiene la invariancia topológica del número de Milnor y la equidesingularización de curvas generalizadas (singularidades de la foliación en las que en su reducción no aparecen sillan-nodo).

Un poco más tarde, D. Cerveau y P. Sad en [CeS86] abordaron el problema de la determinación de los espacios de módulos analíticos de una singularidad genérica dentro de una clase topológica dada. Con ese fin, primero necesitaron considerar la clasificación topológica de dos de tales singularidades, la cual obtuvieron bajo la hipótesis de que ambas singularidades estaban sumergidas en una deformación topológicamente trivial. El resultado clave que les permitió abordar el problema, y por el cual es preciso introducir esa hipótesis restrictiva, es la invariancia topológica de la holonomía proyectiva. Como extrapolación natural, en ese mismo artículo los autores conjeturaron que dicha propiedad debería seguir siendo cierta sin la hipótesis de deformación, e incluso sin las restricciones genéricas impuestas a la singularidad.

Recientemente, en [Mar03] se demostró la conjetura de D. Cerveau y P. Sad en el caso topológicamente quasi-homogéneo (genérico), el cual recordaremos en la siguiente sección. Se obtuvo así, como consecuencia, la clasificación topológica en dicho contexto.

Es natural intentar demostrar dicha conjetura con la mayor generalidad posible. Para ello es necesario comprender bien la topología de las hojas de una

foliación singular, lo cual es precisamente el objetivo del presente trabajo.

2. El caso topológicamente quasi-homogéneo

En esta sección exponemos las ideas claves de la prueba de la conjetura de Cerveau y Sad para foliaciones topológicamente quasi-homogéneas en el caso genérico, así como su clasificación topológica. Para las demostraciones completas referimos al lector directamente al artículo [Mar03].

A partir de ahora U denotará una bola abierta centrada en el origen de \mathbb{C}^2 y todos los objetos que consideraremos estarán germificados en $0 \in U$. En particular, un germen de curva analítica \mathcal{S} vendrá determinado por el conjunto de ceros de una función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$.

Definición 1. Decimos que un germen de curva analítica \mathcal{S} es quasi-homogéneo si admite una ecuación f que es quasi-homogénea, es decir, si f pertenece a su ideal jacobiano $J(f) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$. Decimos que \mathcal{S} es topológicamente quasi-homogéneo (abreviado TQH) si es topológicamente conjugado a un germen quasi-homogéneo. Finalmente decimos que un germen de foliación curva generalizada es TQH si el conjunto de sus separatrices aisladas es TQH.

Observemos que si \mathcal{S} es quasi-homogéneo entonces sus componentes irreducibles son fibras de la función meromorfa analíticamente equivalente a $\frac{x^\beta}{y^\alpha}$. En efecto, una caracterización alternativa de la quasi-homogeneidad de una ecuación reducida f de \mathcal{S} es que existan coordenadas (x, y) de manera que f se escriba en esas coordenadas como un polinomio quasi-homogéneo con ciertos pesos α, β :

$$f(x, y) = \sum_{\alpha i + \beta j = d} a_{ij} x^i y^j.$$

Haciendo la ramificación $(x, y) = (x_1^\alpha, y_1^\beta)$ obtenemos que $f(x, y)$ es un polinomio homogéneo de grado d en las variables (x_1, y_1) cuya descomposición en factores lineales nos proporciona constantes $c_1, \dots, c_d \in \overline{\mathbb{C}}$ tales que

$$\mathcal{S} = f^{-1}(0) = \bigcup_{k=1}^d \left\{ (x, y) : \frac{x^\beta}{y^\alpha} = \left(\frac{x_1}{y_1} \right)^{\alpha\beta} = c_k \right\}.$$

En particular la reducción de singularidades $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$ de una foliación \mathcal{F} TQH (de pesos α, β) siempre viene dada por la desingularización de la foliación $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ definida por la función meromorfa $\frac{x^\beta}{y^\alpha}$. Notemos que la restricción de $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ a $\partial U = \mathbb{S}^3$ es una fibración en círculos que es de Seifert con dos fibras excepcionales, las intersecciones de $\{x = 0\}$ y $\{y = 0\}$ con ∂U . Además, genéricamente las componentes irreducibles de \mathcal{S} (el conjunto de separatrices de \mathcal{F}) son cuspidales, i.e. $c_k \notin \{0, \infty\}$. El divisor excepcional $\pi^{-1}(0)$ contiene una única componente irreducible D con un número (que llamaremos valencia de D) de singularidades de $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}$ mayor o igual a tres. El transformado estricto de \mathcal{S} por π corta

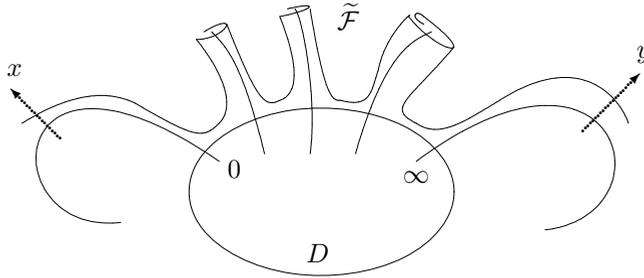


Figura 1: La reducción de singularidades de una foliación topológicamente quasi-homogénea con pesos $\alpha = 2, \beta = 3$ y $d = 3$ separatrices irreducibles.

a $\pi^{-1}(0)$ únicamente en d puntos de D que son singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ y que se identifican con las constantes c_k (ver Figura 1).

Sea $p : U \setminus \{0\} \rightarrow D$ una fibración C^∞ , en discos punteados, que sea topológicamente conjugada a la foliación $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ y de manera que \mathcal{S} sea una unión finita de fibras de p . Sea $D^* = D \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ y Σ una fibra holomorfa de p sobre $b \in D^*$. Consideremos la representación de holonomía proyectiva asociada al divisor D ,

$$H : \pi_1(D^*, b) \rightarrow \text{Diff}(\Sigma, b)$$

y el subgrupo normal N de $\pi_1(D^*, b) = \langle a_0, a_1, \dots, a_d, a_\infty \mid \prod_i a_i = 1 \rangle$ generado por a_0^α y a_∞^β . Es fácil ver que $H(a_0)$ y $H(a_\infty)$ son periódicas de periodos α y β respectivamente. Por tanto la representación de holonomía H factoriza por medio de $\bar{H} : \pi_1^{\text{orb}}(D^*) := \pi_1(D^*)/N \rightarrow \text{Diff}(\Sigma, b)$. Por otro lado, un cálculo sencillo (cf. sección 3.3) muestra que el grupo fundamental de $U^* = U \setminus \mathcal{S}$ puede presentarse como

$$\langle \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_d, \gamma_\infty, c \mid \gamma_0 \cdot \gamma_1 \cdots \gamma_d \cdot \gamma_\infty = c, \gamma_0^\alpha = c^{q_0}, \gamma_\infty^\beta = c^{q_\infty}, [c, \gamma_i] = 1 \rangle,$$

para ciertos enteros no nulos q_0, q_∞ . En particular, el centro de $\pi_1(U^*)$ es isomorfo a \mathbb{Z} con generador c , y su cociente $\pi_1(U^*)/\langle c \rangle$ es isomorfo a $\pi_1^{\text{orb}}(D^*)$.

Consideremos ahora un homeomorfismo $\Phi : U \rightarrow U'$ conjugando dos foliaciones TQH \mathcal{F} y \mathcal{F}' genéricas con separatrices \mathcal{S} y \mathcal{S}' . Como $\Phi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$, Φ induce un isomorfismo $\Phi_* : \pi_1(U^*) \rightarrow \pi_1(U'^*)$ que desciende al cociente por $\langle c \rangle$ dado lugar a un isomorfismo $\bar{\varphi} : \pi_1^{\text{orb}}(D^*) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(D'^*)$. Se puede comprobar que $\bar{\varphi}$ se eleva a su vez a un isomorfismo geométrico $\varphi : \pi_1(D^*) \rightarrow \pi_1(D'^*)$, es decir, de manera que existe un homeomorfismo $\phi : D^* \rightarrow D'^*$ tal que $\phi_* = \varphi$.

Por otro lado, $c = [\partial\bar{\Sigma}]$ es enviado por Φ_* sobre $c' = [\partial\bar{\Sigma}']$ donde Σ' es una fibra holomorfa de una fibración Seifert $p' : U' \setminus \{0\} \rightarrow D'$ asociada a

\mathcal{F}' . Es posible modificar tangencialmente el homeomorfismo Φ para que envíe una corona compacta C que sea un retracto por deformación de $\Sigma \setminus \{b\}$ sobre una corona $C' \subset \Sigma' \setminus \{b'\}$ de las mismas características. Finalmente, usando la genericidad de \mathcal{F} y \mathcal{F}' obtenemos elementos contractantes dentro del grupo de holonomía G de \mathcal{F} que permiten extender $\Phi|_C$ a un homeomorfismo $\psi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$.

Es bien conocido, ver por ejemplo [CeS86], que si los residuos de las singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ son suficientemente genéricos (generan un subgrupo aditivo denso de \mathbb{C}) y G no es abeliano entonces éste es rígido, lo que implica que ψ es conforme.

La *naturalidad* de la construcción esbozada implica que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(D^*, b) & \xrightarrow{\phi_*} & \pi_1(D'^*, b') \\ \downarrow H & & \downarrow H' \\ \text{Diff}(\Sigma, b) & \xrightarrow{\psi_*} & \text{Diff}(\Sigma', b') \end{array} \quad (1)$$

es conmutativo, mostrando de esta manera la invariancia topológica de la holonomía proyectiva en el caso TQH genérico.

Concluimos esta sección con la clasificación topológica de los gérmenes de foliaciones TQH genéricos que se obtiene a partir del resultado anterior. Siguiendo la terminología de [CeS86] introducimos la siguiente definición:

Definición 2. *Decimos que un germen de foliación TQH es N.A.G. si sus separatrices son todas cuspidales, el grupo de holonomía proyectiva de D no es abeliano y los índices de Camacho-Sad de las singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre $D \setminus \{0, \infty\}$ están en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, son diferentes, y generan un subgrupo (aditivo) denso de \mathbb{C} .*

Teorema 3. *Sean \mathcal{F} y \mathcal{F}' dos gérmenes de foliaciones topológicamente quasi-homogéneas N.A.G. Entonces \mathcal{F} y \mathcal{F}' son topológicamente conjugadas si y sólo si sus holonomías son topológicamente conjugadas (mediante el diagrama (1)) y los índices de Camacho-Sad de $\tilde{\mathcal{F}}$ y $\tilde{\mathcal{F}'}$ en las singularidades correspondientes coinciden.*

3. Útiles puramente topológicos

3.1. La descomposición de Jaco-Shalen-Johannson

Comencemos recordando algunas nociones previas sobre variedades de dimensión tres que necesitaremos a continuación.

La primera idea para estudiar variedades de dimensión tres es esencialmente copiar la estrategia utilizada en el caso de superficies: la descomposición mediante suma conexa. Ello nos lleva a la noción de 3-variedad irreducible M como aquella que no admite una descomposición no trivial. Dicho de otro modo, en la que toda esfera es el borde de una bola, es decir, $\pi_2(M) = 0$.

Como esta primera descomposición no es completamente satisfactoria (sólo hay que recordar la conjetura de Poincaré), debemos refinar la estrategia. Para ello se introduce la noción de superficie incompresible de M como aquella superficie $F \subset M$ que *soporta* topología de M . Para una definición precisa, ver [Wal68]. Una caracterización algebraica de la incompresibilidad es que la inclusión de F en M induzca un monomorfismo $\pi_1(F) \hookrightarrow \pi_1(M)$ si $F \not\cong \mathbb{S}^2$ o que la clase de homotopía de $F \hookrightarrow M$ en $\pi_2(M)$ sea no nula si $F \cong \mathbb{S}^2$.

La existencia de superficies incompresibles es un problema delicado y difícil. Es natural restringir nuestra atención a las llamadas variedades *suficientemente grandes* (Haken) que por definición son aquellas que admiten alguna superficie incompresible. Una vez hecha esta hipótesis de trabajo, la idea es descomponer la 3-variedad en trozos cortando por superficies incompresibles.

La razón para elegir superficies incompresibles es bastante natural. Pensemos por ejemplo en una bola de dimensión tres dentro de la cual consideramos un toro sólido. Podemos descomponer la bola en dos pedazos disjuntos separados por el borde del toro sólido. Sin embargo esta descomposición no nos ayuda a entender la topología de la variedad inicial (una bola) sino que la complica más. Esto ha sucedido en este caso porque el borde del toro sólido no es incompresible en el mismo. De esta manera llegamos a la definición de 3-variedad ∂ -irreducible M como aquella en la que su borde (si no es vacío) es incompresible en M .

La descomposición de una 3-variedad demostrada por W. Jaco y P. Shalen [JS79] y K. Johannson [Joh79] independientemente, usando toros incompresibles en lugar de esferas, puede ser enunciada como sigue:

Teorema 4. *Sea M una 3-variedad irreducible, ∂ -irreducible suficientemente grande. Entonces existe un sistema minimal de toros incompresibles \mathcal{T} tal que $M \setminus \mathcal{T}$ es una unión disjunta de 3-variedades M_j que son fibradas Seifert o bien atoroidales (i.e. no admiten toros incompresibles no paralelos al borde). Además, \mathcal{T} es único módulo isotopía.*

Observación 5. *Para todo toro $T \subset \mathcal{T}$ y toda pieza M_j adyacente a T se tiene que las inclusiones canónicas inducen monomorfismos*

$$\pi_1(T) \hookrightarrow \pi_1(M_j \cup T) \cong \pi_1(M_j) \hookrightarrow \pi_1(M).$$

Cuando la 3-variedad M tiene una estructura de grafo, esta descomposición coincide con la que introdujo F. Waldhausen en [Wal67].

3.2. Variedades de grafo

En esta sección vamos a describir de forma intuitiva un tipo de construcción de ciertas superficies complejas abiertas que ya aparecen en [Lau73]. Para ello comenzamos considerando un grafo conexo Δ y el conjunto V de sus vértices dotado de dos ponderaciones

$$e : V \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad g : V \rightarrow \mathbb{Z}^+.$$

Para cada $v \in V$ sea $\pi_v : U_v \rightarrow D_v$ un fibrado en discos de clase de Chern $e_v \in \mathbb{Z} \cong H^2(D_v, \mathbb{Z})$ sobre una superficie de Riemann compacta D_v de género

$g_v \geq 0$. Para cada arista de Δ uniendo dos vértices v y v' consideramos sendas trivializaciones locales $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \hookrightarrow D_w$ de π_w para $w \in \{v, v'\}$. A continuación pegamos los abiertos U_v y $U_{v'}$ utilizando estas trivializaciones mediante la identificación $(x, y) \mapsto (y, x)$ (comparar con [LN87]). El resultado es una superficie compleja $W(\Delta)$ dotada de un divisor $D = \sum_{v \in V} D_v$. Hay que hacer notar que sólo la clase topológica de la superficie compleja $W(\Delta)$ está unívocamente determinada por la construcción descrita. En general, la libertad en la elección de las trivializaciones locales utilizadas en el pegado hace que se puedan construir de esta manera muchas superficies complejas analíticamente diferentes.

Sea $A(\Delta)$ la matriz de intersección de las componentes del divisor D . Podemos ver que

$$A(\Delta)_{vv'} = \begin{cases} e_v & \text{si } v = v' \\ 1 & \text{si } v \text{ y } v' \text{ son adyacentes en } \Delta \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observación 6. *Un célebre resultado de H. Grauert (cf. [Gra62]) implica que si $A(\Delta)$ es definida negativa entonces $W(\Delta)$ tiene una única estructura compleja. De manera más precisa, existe una variedad analítica F de dimensión dos con una singularidad aislada $P \in F$ y un morfismo $\pi : (W(\Delta), D) \rightarrow (F, P)$ tal que su restricción a $W(\Delta) \setminus D$ es un biholomorfismo sobre $F \setminus \{P\}$. Además P es una singularidad normal de F , cf. [Mum61]. Si además se cumple que $|\det(A(\Delta))| = 1$ entonces F es un entorno abierto U_0 del origen en \mathbb{C}^2 y una composición de explosiones $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que la superficie $(W(\Delta), D)$ es biholomorfa a $(\pi^{-1}(U_0), \pi^{-1}(0))$.*

Observemos también que $W = W(\Delta)$ admite una compactificación natural como variedad topológica de dimensión 4 con borde ∂W no vacío. Como la inclusión natural $D \hookrightarrow W$ induce un retracts por deformación, es posible definir una aplicación natural de $M(\Delta) := \partial W(\Delta)$ en $W^*(\Delta) := W(\Delta) \setminus D$ que también es una equivalencia homotópica. Como $M(\Delta)$ es una 3-variedad compacta, se tiene que $\mathbb{Z} \cong H_0(W^*) \cong H_3(W^*)$, $H_1(W^*) \cong H_2(W^*)$ y el resto de grupos de homología de W^* son nulos.

Por otro lado, como D es un retracts de W se tiene que $H_1(W) \cong \mathbb{Z}^{p+2 \sum_v g_v}$, donde $p = \dim H^1(\Delta)$. Además, podemos considerar la sucesión exacta larga de homología del par $(W, \partial W)$:

$$\cdots \rightarrow H_2(W) \rightarrow H_2(W, \partial W) \rightarrow H_1(\partial W) \rightarrow H_1(W) \rightarrow H_1(W, \partial W) \rightarrow \cdots \quad (2)$$

La dualidad de Poincaré para variedades con borde implica que $H_1(W, \partial W) \cong H^3(W) = 0$, pues W tiene el tipo de homotopía del divisor D que es un CW-complejo de dimensión dos. Así pues, de (2) deducimos que el morfismo $H_1(\partial W) \rightarrow H_1(W)$ es exhaustivo. Por otro lado, si el morfismo $H_2(W) \rightarrow H_2(W, \partial W)$ es exhaustivo entonces $H_1(\partial W) \rightarrow H_1(W)$ es un isomorfismo.

A partir de ahora sólo consideraremos grafos ponderados de manera que $p = 0$ (i.e. Δ es un árbol) y $g \equiv 0$ (i.e. $D_v \cong \mathbb{P}^1$ para todo $v \in V$). Estas condiciones son equivalentes al hecho que el divisor D es simplemente conexo, cf. [Mum61].

En particular, $H_1(W) = 0$ y $H_2(W, \partial W) \cong H^2(W) \cong H^2(D) \cong \mathbb{Z}^V \cong H_2(D) \cong H_2(W)$. Sin embargo, ello no implica que $M = \partial W$ sea una esfera de homología. De hecho, como se deduce de los resultados de la siguiente sección, se tiene que $H_1(M(\Delta)) \cong \text{coker}(A(\Delta))$ interpretando $A(\Delta)$ como un endomorfismo de \mathbb{Z}^V . En particular, $H_1(M(\Delta)) = 0$ si y sólo si $|\det(A(\Delta))| = 1$. Así pues, podemos concluir que en general el grupo fundamental de $M(\Delta)$ no es trivial. Una presentación de dicho grupo, bajo las hipótesis expuestas, puede encontrarse en [Mum61]. A continuación, procederemos a calcular el grupo fundamental de una cierta subvariedad abierta $W^*(\bar{\Delta})$ de $W^*(\Delta)$.

3.3. La topología de un divisor

Siguiendo con las notaciones anteriores, consideremos un árbol $\bar{\Delta}$ conteniendo a Δ . Pedimos que su conjunto de vértices \bar{V} sea tal que para todo $v' \in V' := \bar{V} \setminus V$ existe un único $v \in V$ adyacente a v' en $\bar{\Delta}$. A cada $v' \in V'$ le asociamos una fibra distinta $D_{v'}$ de la fibración en discos $\pi_v : U_v \rightarrow D_v$ y consideramos el divisor $\bar{D} = \sum_{\bar{v} \in \bar{V}} D_{\bar{v}}$ de $W(\Delta)$. Sea $W^*(\bar{\Delta}) = W(\Delta) \setminus \bar{D}$ (notemos

que el caso $V' = \emptyset$ no está excluido). Para todo par $v'_1, v'_2 \in V'$ se tiene que la matriz de intersección $A(\bar{\Delta})$ del divisor \bar{D} verifica $A(\bar{\Delta})_{v'_1 v'_2} = D_{v'_1} \cdot D_{v'_2} = 0$.

Nuestro próximo objetivo es dar una presentación explícita del grupo fundamental de $W^*(\bar{\Delta})$. Para ello comenzaremos definiendo una serie de lazos que constituirán un sistema de generadores de dicho grupo.

Para cada $\bar{v} \in \bar{V}$ consideremos un lazo $\delta_{\bar{v}}$ que sea el borde positivamente orientado de un pequeño disco conforme transverso a $D_{\bar{v}}$ centrado en un punto regular de \bar{D} . Fijemos un punto p de $W^*(\bar{\Delta})$ y caminos $\beta_{\bar{v}}$ uniendo p y $\delta_{\bar{v}}$ en $W^*(\bar{\Delta})$ tales que $\beta_{\bar{v}} \cap \beta_{\bar{w}} = \{p\}$. Consideremos el sistema de lazos con punto base p dado por:

$$\mathcal{G} : \quad \gamma_{\bar{v}} = \beta_{\bar{v}} \cdot \delta_{\bar{v}} \cdot \beta_{\bar{v}}^{-1}, \quad \bar{v} \in \bar{V}. \tag{3}$$

Proposición 7. *El grupo fundamental de $W^*(\bar{\Delta})$ admite la presentación $\langle \mathcal{G} | \mathcal{R} \rangle$, donde \mathcal{G} es el sistema de lazos introducidos en (3) y \mathcal{R} es el conjunto de relaciones siguientes:*

$$\mathcal{R} : \quad \begin{cases} \prod_{\bar{v} \in \bar{V}} \gamma_{\bar{v}}^{A_{v\bar{v}}} = 1, & \forall v \in V, \\ [\gamma_v, \gamma_w]^{a_{vw}} = 1, & \forall v, w \in \bar{V}. \end{cases}$$

La prueba de esta propiedad se obtiene inductivamente, aplicando el Teorema de Seifert-Van Kampen a los abiertos fibrados $U_v^* = U_v \setminus \bar{D}$ de $W^*(\bar{\Delta})$ de manera análoga a como se procede en [Mum61]. El caso $\bar{\Delta} = \Delta = \bullet_e$ que corresponde al inicio de la inducción no está explícitamente tratado allí. Se trata del espacio total de un fibrado $\pi : U \rightarrow D$ en discos sobre $D = \mathbb{P}^1$ de clase de Chern e . En particular $M(\Delta)$ es un \mathbb{S}^1 -fibrado sobre \mathbb{S}^2 y la sucesión exacta larga de homotopía contiene el tramo

$$\underbrace{\pi_2(\mathbb{S}^2)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{\pi_1(\mathbb{S}^1)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \pi_1(M(\Delta)) \rightarrow 0.$$

Se puede comprobar que el primer morfismo (de conexión) se corresponde con la multiplicación por $e : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ de forma que $\pi_1(M(\Delta)) \cong \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, tal y como se afirma en la Proposición 7.

Corolario 8. *El grupo $H_1(W^*(\overline{\Delta}))$ es isomorfo al conúcleo de la aplicación lineal $\mathbb{Z}^{\overline{V}} \rightarrow \mathbb{Z}^V$ obtenida eliminando las filas de la matriz $A(\overline{\Delta})$ correspondientes a los vértices de V' .*

En efecto, de la proposición anterior se desprende que $H_1(W^*(\overline{\Delta}))$ es el grupo abeliano generado por 1-cadenas $c_{\overline{v}}$ correspondientes a los lazos $\gamma_{\overline{v}}$, $\overline{v} \in \overline{V}$ módulo las relaciones

$$\sum_{\overline{v} \in \overline{V}} A(\overline{\Delta})_{v\overline{v}} c_{\overline{v}} = 0, \quad \text{para todo } v \in V.$$

En lo que sigue, nos interesará estudiar la 3-variedad con frontera

$$M(\overline{\Delta}) := M(\Delta) \setminus V(D')$$

obtenida a partir de $M(\Delta)$ eliminando un entorno tubular de $D' \cap M(\Delta)$, donde D' es el divisor $\sum_{v' \in V'} D_{v'}$ de $W(\Delta)$.

Ejemplo 9. *Consideremos el caso de $S = \{Y^2 = X^3\}$. Es bien conocido que $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus S) = \langle x, y \mid y^2 = x^3 \rangle$. El morfismo de desingularización $\pi : \widetilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ de S tiene como grafo dual ponderado $\overline{\Delta}$ el descrito en la Figura 2, de manera que $W(\overline{\Delta})$ se identifica con la preimagen por π de un entorno del origen de \mathbb{C}^2 y el divisor \overline{D} con el transformado total por π de S . La matriz de intersección de \overline{D} es*

$$A(\overline{\Delta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de manera que en este caso la presentación de $\pi_1(W^*(\overline{\Delta}))$ dada por la Proposición 7 es la siguiente:

$$\langle \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \mid \gamma_1^{-3} \gamma_3 = \gamma_2^{-2} \gamma_3 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3^{-1} = [\gamma_i, \gamma_3] = 1 \rangle.$$

Es inmediato comprobar que $x = \gamma_1$, $y = \gamma_2$ son generadores y que la única relación no trivial entre ellos es $y^2 = x^3$. Por otro lado, del Corolario 8 deducimos que $H_1(\mathbb{C}^2 \setminus S) = (\mathbb{Z}c_0 \oplus \mathbb{Z}c_1 \oplus \mathbb{Z}c_2 \oplus \mathbb{Z}c_3) / \langle -3c_1 + c_3, -2c_2 + c_3, c_0 + c_1 + c_2 - c_3 \rangle = \mathbb{Z}c_0$.

3.4. Interpretación cohomológica de foliaciones logarítmicas

Del Corolario 8 se deduce que $H^1(W^*(\overline{\Delta}), \mathbb{C}) = \text{Hom}(H_1(W^*(\overline{\Delta})), \mathbb{C})$ es isomorfo a

$$\{(\mu_{\overline{v}}) \in \mathbb{C}^{\overline{V}} : \sum_{\overline{v} \in \overline{V}} A(\overline{\Delta})_{v\overline{v}} \mu_{\overline{v}} = 0, \forall v \in V\}, \quad \text{mediante } \mu \mapsto (\mu(c_{\overline{v}}))_{\overline{v} \in \overline{V}}.$$

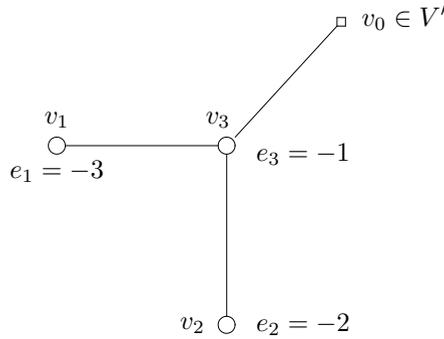


Figura 2: El grafo dual ponderado de la reducción de singularidades de la cúspide ordinaria $\{Y^2 = X^3\}$.

A partir de ahora supondremos que $|\det(A(\Delta))| = 1$. Por la Observación 6, existe una composición de explosiones $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $W(\Delta)$ es biholomorfo la preimagen de un entorno abierto U del origen de \mathbb{C}^2 . Para cada componente irreducible $\pi(D_{v'})$, $v' \in V'$ de $\mathcal{S} = \pi(D') \subset U$ consideramos una ecuación reducida $f_{v'}$ en U . Existe un isomorfismo natural entre $H^1(W^*(\bar{\Delta}), \mathbb{C})$ y $H^1_{DR}(U \setminus \mathcal{S})$ dado explícitamente por

$$\mu \mapsto \omega_\mu = \sum_{v' \in V'} \mu_{v'} \frac{df_{v'}}{f_{v'}}.$$

Definición 10. Para cada $v' \in V'$ y $\bar{v} \in \bar{V}$ consideremos el orden de anulación $m_{\bar{v}v'} \in \mathbb{Z}^+$ de $\pi^* f_{v'}$ a lo largo de $D_{\bar{v}}$:

$$m_{\bar{v}v'} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\pi(c_{\bar{v}})} \frac{df_{v'}}{f_{v'}}.$$

Lema 11. Para todo $v \in V$ se tiene la igualdad $c_v = \sum_{v' \in V'} m_{vv'} c_{v'}$ en $H_1(W^*(\bar{\Delta}))$.

Antes de efectuar la demostración de este cálculo podemos ilustrarlo con ayuda del Ejemplo 9. Con las notaciones introducidas allí se tiene que $c_1 = 2c_0$, $c_2 = 3c_0$ y $c_3 = 6c_0$.

Demostración. Como $|\det(A(\Delta))| = 1$ resulta que $\text{coker}(A(\Delta)) = 0$ y por tanto $H_1(W^*(\bar{\Delta})) = \bigoplus_{v' \in V'} \mathbb{Z}c_{v'}$. Por consiguiente, existen enteros $n_{vv'}$ de manera que

$c_v = \sum_{v' \in V'} n_{vv'} c_{v'}$. Sólo hemos de observar que $n_{vv'} = m_{vv'}$. En efecto,

$$m_{vv'} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\pi(c_v)} \frac{df_{v'}}{f_{v'}} = \sum_{v'' \in V'} n_{vv''} \frac{1}{2i\pi} \int_{\pi(c_{v''})} \frac{df_{v'}}{f_{v'}} = \sum_{v'' \in V'} n_{vv''} \delta_{v'v''} = n_{vv'},$$

donde $\delta_{v'v''}$ es la delta de Kronecker. □

Observemos que si $\mu \in H^1(W^*(\bar{\Delta}), \mathbb{C})$ no es nulo entonces ω_μ define una foliación logarítmica \mathcal{F}_μ sobre U cuyas separatrices contienen a \mathcal{S} . Una propiedad interesante de esta formulación es que con ella es posible caracterizar las foliaciones logarítmicas dicríticas, es decir, aquellas que admiten una infinidad de separatrices.

Proposición 12. *La foliación logarítmica \mathcal{F}_μ es no dicrítica si y solo si para todo $v \in V$ se tiene que $\mu_v \neq 0$ y el cociente $I_{wv} = -\frac{\mu_w}{\mu_v} \notin \mathbb{Q}^+$ siempre que $v, w \in V$ son adyacentes en Δ . En tal caso, el divisor D es invariante por la foliación $\tilde{\mathcal{F}}_\mu = \pi^* \mathcal{F}_\mu$ y sus índices de Camacho-Sad verifican que $CS(\tilde{\mathcal{F}}_\mu, D_v, D_w \cap D_v) = I_{wv}$.*

Demostración. Consideremos la integral primera multiforme de \mathcal{F}_μ dada por $F_\mu = \prod_{v' \in V'} f_{v'}^{\mu_{v'}}$. Si $v, w \in \bar{V}$ son adyacentes en $\bar{\Delta}$ entonces existen coordenadas locales (x, y) en un entorno U_{vw} de $D_v \cap D_w$ en $W(\Delta)$ de manera que $D_v \cap U_{vw} = \{x = 0\}$ y $D_w \cap U_{vw} = \{y = 0\}$. La derivada logarítmica de $\pi^* F_\mu$ se escribe en estas coordenadas como

$$\underbrace{\left(\sum_{v' \in V'} \mu_{v'} m_{vv'} \right)}_{\mu_v} \frac{dx}{x} + \underbrace{\left(\sum_{v' \in V'} \mu_{v'} m_{wv'} \right)}_{\mu_w} \frac{dy}{y} + d(\text{función holomorfa}).$$

Si $\mu_v, \mu_w \neq 0$ entonces D_v y D_w son $\tilde{\mathcal{F}}_\mu$ -invariantes y obtenemos la fórmula anunciada para los índices de Camacho-Sad de $\tilde{\mathcal{F}}_\mu$. Si $\mu_v = 0$ y $\mu_w \neq 0$ entonces D_v es transverso a $\tilde{\mathcal{F}}_\mu$ que por tanto es dicrítica si $w \in V$. Finalmente, si $\mu_v = \mu_w = 0$, deben existir (pues $\mu \neq 0$) dos nuevos divisores adyacentes D_u y $D_{w'}$ con $u \in V$ tales que $\mu_u = 0$ y $\mu_{w'} \neq 0$, en cuyo caso también concluimos que \mathcal{F}_μ es dicrítica. □

3.5. La topología de las separatrices

Sea \mathcal{F} el germen de una curva generalizada y consideremos el conjunto \mathcal{S} de separatrices aisladas de \mathcal{F} , que no es vacío [CS82]. Siguiendo a [Mum61], consideremos la variedad de dimensión tres $M(\mathcal{S}) = \mathbb{S}_\epsilon^3 \setminus V(\mathcal{S})$ obtenida eliminando de una pequeña esfera \mathbb{S}_ϵ^3 , centrada en el origen, un entorno tubular $V(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S} \cap \mathbb{S}_\epsilon^3$. Observemos que con las notaciones introducidas, $M(\mathcal{S})$ no es más que la 3-variedad con frontera $M(\bar{\Delta})$ asociada al grafo dual ponderado $\bar{\Delta}$ de la desingularización de \mathcal{S} .

Observación 13. *La variedad $M = M(\mathcal{S})$ satisface las hipótesis del Teorema 4. En efecto:*

- Es bien conocido, ver por ejemplo [Wal68], que si $\partial M \neq \emptyset$ y $M \not\cong \mathbb{B}^3$ entonces M es suficientemente grande (Haken).

- La sucesión exacta larga de homotopía de la fibración de Milnor $f/|f| : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ (donde F es la fibra de Milnor)

$$0 \rightarrow \underbrace{\pi_2(F)}_0 \rightarrow \pi_2(M) \rightarrow \underbrace{\pi_2(\mathbb{S}^1)}_0 \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow 0 \quad (4)$$

implica que $\pi_2(M) = 0$ por lo cual M es irreducible.

- El cálculo de $\pi_1(M)$ obtenido en la sección anterior muestra que $\pi_1(\partial M) \hookrightarrow \pi_1(M)$, es decir, que M es ∂ -irreducible.

De los trabajos de F. Waldhausen y W. Neumann [Wal68, Neu81] se desprende la siguiente propiedad, también expuesta con claridad en el capítulo 4 de la tesis doctoral de P. Popescu-Pampu, cf. [Pop01, Théorème 4.11.2.]

Proposición 14. *La descomposición de JSJ de $M(\mathcal{S})$ viene determinada por el grafo dual $\overline{\Delta}(\mathcal{S})$ de la desingularización de \mathcal{S} de la manera siguiente: las piezas de $M(\mathcal{S}) \setminus V(\mathcal{T})$ son todas de tipo Seifert y están en correspondencia biyectiva con los vértices de valencia mayor o igual a tres (llamados vértices de ruptura) de $\overline{\Delta}(\mathcal{S})$.*

Observación 15. *Las piezas Seifert de la descomposición de JSJ de M corresponden a las piezas topológicamente quasi-homogéneas (TQH) de $U^* = U \setminus \mathcal{S}$, cf. sección 2.*

La unicidad de la descomposición de JSJ de $M = M(\mathcal{S})$ implica que si Φ es un homeomorfismo conjugando dos foliaciones singulares \mathcal{F} y \mathcal{F}' entonces $\Phi_* : \pi_1(U^*) \rightarrow \pi_1(U'^*)$ es un isomorfismo que envía el grupo fundamental de una pieza Seifert M_j de M sobre el grupo fundamental de una pieza Seifert M'_j de $M' = M(\mathcal{S}')$:

$$\pi_1(M_j) \subset \pi_1(M) \cong \pi_1(U^*), \quad \Phi_*(\pi_1(M_j)) = \pi_1(M'_j) \subset \pi_1(U'^*).$$

¿Qué relación existe entre dicha descomposición topológica de U^* en piezas TQH y la dinámica de la foliación \mathcal{F} ? A fin de responder a esta pregunta introducimos a continuación la noción de 1-conexidad foliada.

4. La noción de 1-conexidad foliada

Definición 16. *Sea \mathcal{F} una foliación en U y $V \subset U$. Decimos que V es 1-conexo en U respecto a la foliación \mathcal{F} (y notaremos $V \curvearrowright_{\mathcal{F}} U$) si para todo camino γ en una hoja \mathcal{L} de \mathcal{F} que sea homótopo (a extremidades fijas) a un camino β contenido en V existe un camino α contenido en $\mathcal{L} \cap V$ homótopo (a extremidades fijas) a β en V y a γ en \mathcal{L} :*

$$\begin{array}{ccc} \alpha \subset \mathcal{L} \cap V & \longrightarrow & V \supset \beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \gamma \subset \mathcal{L} & \longrightarrow & U \supset \beta \sim \gamma \end{array}$$

Observación 17. *Las siguientes propiedades son inmediatas:*

- *reflexiva:* $U \looparrowright_{\mathcal{F}} U$;
- *transitiva:* $W \looparrowright_{\mathcal{F}} V, V \looparrowright_{\mathcal{F}} U \implies W \looparrowright_{\mathcal{F}} U$;
- *caracterización de la incompresibilidad de las hojas:*

$$\{p\} \looparrowright_{\mathcal{F}} U \iff \pi_1(\mathcal{L}_p) \hookrightarrow \pi_1(U).$$

Sea \mathcal{F} una foliación singular definida en un entorno U_0 del origen de \mathbb{C}^2 y sea \mathcal{S} el conjunto de sus separatrices aisladas. Es natural tomar como U_0 un abierto topológicamente equivalente a una bola centrada en el origen. Una pregunta natural que podemos plantearnos es: ¿bajo qué circunstancias se tiene la incompresibilidad de las hojas de \mathcal{F} restringida a $U_0^* = U_0 \setminus \mathcal{S}$? Esta cuestión claramente depende de la elección de U_0 ya que es fácil construir artificialmente abiertos de manera que las hojas de $\mathcal{F}|_{U_0^*}$ contengan ciclos no triviales pero homótopos a constante en U_0^* , cf. Figura 3.

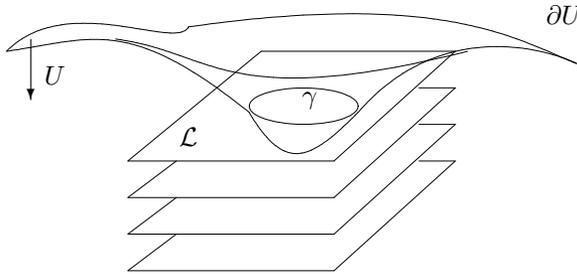


Figura 3: Ejemplo de un abierto U en el que no se tiene la 1-conexidad foliada de un punto, pues el lazo $\gamma \subset \mathcal{L}$ es homótopo a constante en U pero no en la hoja \mathcal{L} .

Para matizar este problema, podemos considerar una situación cuya dinámica es muy sencilla: el caso hamiltoniano, i.e. una foliación \mathcal{F} cuyas hojas vienen dadas por las curvas de nivel de una función holomorfa $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de manera que $\mathcal{S} = f^{-1}(0)$. Es la situación que tratada en [Mil68], donde se muestra que si $\varepsilon, \eta > 0$ son suficientemente pequeños entonces el *tubo de Milnor* $U = U_{\varepsilon, \eta} = f^{-1}(\mathbb{D}_{\eta}) \cap \mathbb{B}_{\varepsilon}$ verifica que f restringida a $U^* = U \setminus \mathcal{S}$ define una fibración localmente trivial sobre \mathbb{D}_{η}^* . La sucesión exacta larga de homotopía correspondiente acaba en

$$1 = \pi_2(\mathbb{D}_{\eta}^*) \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(U^*) \rightarrow \pi_1(\mathbb{D}_{\eta}^*) \rightarrow 1,$$

donde F es la fibra de Milnor, i.e. una hoja cualquiera de \mathcal{F} restringida a U^* .

Así pues, podemos concretar la cuestión anterior preguntándonos sobre la existencia de un sistema fundamental de entornos en los que sea válida la incompresibilidad de las hojas (en el complementario de \mathcal{S}). Observemos que, en

la construcción de Milnor, los abiertos $U_{\varepsilon, \eta}$ son saturados por \mathcal{F} . En general, no es posible encontrar abiertos saturados por una foliación singular. A fin de superar esta dificultad consideremos el morfismo $\pi : \tilde{U}_0 \rightarrow U_0$ de reducción de singularidades de \mathcal{F} y sean $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}$ y $\tilde{\mathcal{S}}$ el transformado estricto de \mathcal{S} . Diremos que una singularidad de $\tilde{\mathcal{F}}$ es *interior* si no está sobre $\tilde{\mathcal{S}}$ ni sobre ninguna *rama muerta* del divisor excepcional $\pi^{-1}(0)$ de \tilde{U}_0 , es decir, sobre una unión maximal de divisores de valencia menor o igual a dos conteniendo un único divisor de valencia uno.

El siguiente resultado proviene de un trabajo conjunto con J.-F. Mattei, cf. [MM05]:

Teorema 18. *Con las notaciones anteriores, supongamos que todas las singularidades interiores de $\tilde{\mathcal{F}}$ son linealizables. Entonces existe un sistema de entornos \mathcal{U} del origen tal que para todo U de \mathcal{U} las hojas de \mathcal{F} restringida a $U^* = U \setminus \mathcal{S}$ son incompresibles en U^* . Además, para todo par $U, U' \in \mathcal{U}$ tal que $U \subset U'$ se tiene que la inclusión natural induce un isomorfismo entre $\pi_1(U^*)$ y $\pi_1(U'^*)$.*

De hecho, el resultado obtenido en [MM05] es más preciso: allí demostramos la 1-conexidad foliada de uniones arbitrarias de bloques topológicamente quasi-homogéneos de U^* .

Referencias

- [CS82] CÉSAR CAMACHO Y PAULO SAD. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Ann. of Math. (2)*, 115(3):579–595, 1982.
- [CLNS84] CÉSAR CAMACHO, ALCIDES LINS NETO Y PAULO SAD. Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields. *J. Differential Geom.*, 20(1):143–174, 1984.
- [CeS86] DOMINIQUE CERVEAU Y PAULO SAD. Problèmes de modules pour les formes différentielles singulières dans le plan complexe. *Comment. Math. Helv.*, 61(2):222–253, 1986.
- [Gra62] HANS GRAUERT. Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Math. Ann.*, 146:331–368, 1962.
- [JS79] WILLIAM H. JACO Y PETER B. SHALEN. Seifert fibered spaces in 3-manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, n° 220, 1979.
- [Joh79] KLAUS JOHANNSON. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries, Lecture Notes in Mathematics*, n° 761. Springer, 1979.
- [Lau73] HENRY B. LAUFER. Taut two-dimensional singularities. *Math. Ann.*, 205:131–164, 1973.

- [LN87] ALCIDES LINS NETO. Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two. *J. Differential Geom.*, 26(1):1–31, 1987.
- [Mar03] DAVID MARÍN. Moduli spaces of germs of holomorphic foliations in the plane. *Comm. Math. Helv.*, 78:518–539, 2003.
- [MM05] DAVID MARÍN Y JEAN-FRANÇOIS MATTEI. The topology of the leaves of some singular foliations. (En preparación).
- [Mil68] JOHN MILNOR. *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, n° 61. Princeton University Press, 1968.
- [Mum61] DAVID MUMFORD. The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 9:5–22, 1961.
- [Neu81] WALTER D. Neumann. A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 268(2):299–344, 1981.
- [Pop01] PATRICK POPESCU-PAMPU. *Arbres de contact des singularités quasi-ordinaires et graphes d'adjacence pour les 3-variétés réelles*. Tesis doctoral, Université Paris 7, 2001.
- [Wal67] FRIEDHELM WALDHAUSEN. Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Invent. Math.*, 3:308–333 y 4:87–117, 1967.
- [Wal68] FRIEDHELM WALDHAUSEN. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *Ann. of Math. (2)*, 87:56–88, 1968.

David Marín
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona. Edifici C.
08193 Bellaterra (Barcelona)
davidmp@mat.uab.es

Interpretación proyectiva de las métricas del plano real

Santiago Mazuelas Franco

Tordesillas, 20 de diciembre de 2006

1. Introducción

Un plano métrico real es un par (\mathbb{A}, F) , donde \mathbb{A} es un plano afín real de plano vectorial asociado V y F es una forma bilineal simétrica en V . Así, el tipo de métrica viene determinado por el tipo de la forma bilineal simétrica F , que corresponde a lo que podemos llamar producto escalar.

Si proyectivizamos dicha estructura, podemos sumergir el plano afín en el plano proyectivo y el espacio vectorial asociado se identifica de modo natural con la recta del infinito de la inmersión. La forma bilineal F describe entonces una cónica, $[Q]_\infty$, en la recta del infinito, pero esta cónica no proporciona la misma información que F , ya que determina F salvo un factor de proporcionalidad. Así, el par $(\mathbb{A}, [Q]_\infty)$ refleja la “estructura conforme” del plano métrico.

En la geometría euclídea, la forma bilineal es definida positiva y en consecuencia la cuádrica asociada es un par de puntos imaginarios conjugados. Clásicamente a esos dos puntos se los conoce como puntos cíclicos del plano, debido al hecho de que una cónica real no degenerada es una circunferencia si y sólo si pasa por esos puntos.

Se puede sumergir el plano métrico en un plano proyectivo y éste en un espacio de dimensión 3, en el cual vía proyección estereográfica se puede asociar el plano con una cuádrica real irreducible, cuya geometría intrínseca se traduce en la geometría métrica del plano. Por ejemplo, esta cuádrica del espacio determina la cónica del infinito $[Q]_\infty$, al restringirla a la recta del infinito del plano.

Como es bien sabido, para el caso euclídeo la construcción anterior es la de la esfera de Riemann y se puede reproducir también la geometría euclídea del plano a partir de la estructura algebraica del cuerpo complejo. Esta construcción clásica que asocia el plano euclídeo con la \mathbb{R} -álgebra \mathbb{C} o con la cuádrica de puntos del espacio (esfera), permite:

1. Determinar la cónica del infinito (los dos puntos cíclicos), a partir de las tangentes al polo de la proyección contenidas en la cuádrica (cono imaginario) o a partir de los elementos de norma nula de la \mathbb{R} -álgebra (cono imaginario).

2. Definir de forma intrínseca los ciclos; geoméricamente como secciones planas de la esfera o algebraicamente a partir de la razón doble de números complejos.
3. Representar linealmente el grupo inversivo del plano, es decir el grupo de transformaciones generado por movimientos, homotecias e inversiones; en la \mathbb{R} -álgebra \mathbb{C} como el grupo de Möbius y en la esfera como restricción del grupo de proyectividades del espacio que dejan invariante la esfera.

Nuestro objetivo es generalizar esta construcción a los otros tipos de geometrías métricas del plano, escogiendo otras cuádricas y otras \mathbb{R} -álgebras. Por ejemplo, para los otros tipos de geometrías métricas del plano las cónicas del infinito son reales y por lo tanto los conos que las determinan también son reales.

Vamos a obtener alternativas al cuerpo complejo, mediante el estudio de las posibles estructuras de \mathbb{R} -álgebra sobre \mathbb{R}^2 , veremos que se pierde el carácter de cuerpo pero queda suficiente estructura algebraica para poder definir una razón doble; mediante la cual podemos definir los ciclos igual que en el caso complejo.

Como se conoce, para la construcción clásica de la esfera de Riemann los dos objetos con los que se asocia al plano euclídeo, esfera y cuerpo complejo, son el mismo vía paso a la recta proyectiva compleja, y lo que se está haciendo realmente es compactificar el plano añadiéndole un punto. Esta compactificación permite representar el grupo inversivo para la geometría euclídea del plano de una forma lineal, ya sea como restricción de proyectividades del espacio que dejan invariante la esfera o como automorfismos de la recta proyectiva compleja (transformaciones de Möbius). Veremos cómo también sobre las \mathbb{R} -álgebras que definimos en este artículo podemos definir rectas proyectivas, que esas rectas proyectivas coinciden con unas cuádricas que juegan un papel análogo al de la esfera de Riemann, ya que lo que estamos haciendo es elegir distintas compactificaciones para el plano, y que cada tipo de compactificación nos permite representar linealmente los grupos inversivos para cada una de las geometrías métricas del plano, cerrando así el cuadro Geometrías métricas del plano \equiv Cuádricas del espacio \equiv Rectas proyectivas.

Por lo tanto, vamos a conseguir interpretaciones proyectivas de las geometrías métricas del plano real, comprobando que cada geometría lleva consigo una compactificación de \mathbb{R}^2 ya sea sumergiéndolo en una cuádrlica proyectiva o equivalentemente en la recta proyectiva sobre una \mathbb{R} -álgebra real bidimensional. Estas compactificaciones están ligadas directamente a la métrica del plano y, por ejemplo, nos permiten representar de manera lineal el grupo inversivo para cada métrica.

El grupo inversivo que en dimensiones mayores coincide con el grupo conforme es de gran importancia, por ejemplo, en muchas disciplinas de la física y por tanto representaciones matriciales y sencillas de dicho grupo son de gran utilidad.

2. \mathbb{R} -álgebras bidimensionales con unidad

Nota 1 Sea \mathbb{K} una \mathbb{R} -álgebra finitamente generada y con uno, el homomorfismo estructural

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ 1_{\mathbb{R}} &\longmapsto 1_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$

es inyectivo al ser no nulo y \mathbb{R} cuerpo.

Por lo tanto $1_{\mathbb{K}}$ es parte libre en el \mathbb{R} espacio vectorial \mathbb{K} y puedo extender $\{1_{\mathbb{K}}\}$ a una base de \mathbb{K} .

Nota 2 Para $n = 2$, sea $\xi \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$, obviamente $\{1, \xi\}$ es parte libre en \mathbb{K} y por lo tanto $\{1, \xi\}$ es una base del \mathbb{R} espacio vectorial \mathbb{K} . Además como $1 \cdot \xi = \xi \cdot 1$, se tiene que el anillo \mathbb{K} es conmutativo.

Sin embargo, para dimensiones mayores, las \mathbb{R} -álgebras no tienen por qué ser conmutativas. Por ejemplo, el cuerpo de los números cuaterniónicos es una \mathbb{R} -álgebra de dimensión 4 que no es conmutativa.

Proposición 1 \mathbb{K} es una \mathbb{R} -álgebra con 1, de dimensión dos, si y sólo si es una extensión algebraica de \mathbb{R} de grado dos.

Proposición 2 Las únicas extensiones de grado 2 de los números reales, salvo isomorfismo, son:

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2 + 1)}, \quad \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2 - 1)} \quad \text{ó} \quad \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2)}$$

Definición 1 Llamamos:

- Números complejos a

$$\mathbb{C} = \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2 + 1} = \{\alpha + i\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

- Números paracomplejos a

$$\mathbb{M} = \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2 - 1} = \{\alpha + j\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, j^2 = 1\}$$

- Números duales a

$$\mathbb{D} = \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2} = \{\alpha + \varepsilon\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$$

Toda \mathbb{R} -álgebra extensión de grado 2 del cuerpo real es isomorfa a alguna de estas tres, que no pueden ser isomorfas entre sí, ya que los paracomplejos tienen divisores de cero y los duales nilpotentes.

Nota 3 Los números paracomplejos, \mathbb{M} , son también conocidos como motores, ya que es el nombre que les da Clifford al utilizarlos para para representar sumas de espines.

Nota 4 Los números duales se utilizan como un análogo algebraico al análisis no estándar, por ejemplo en el estudio de las deformaciones infinitesimales en geometría algebraica. Obsérvese que en la expresión $\alpha + \beta\varepsilon$, α juega el papel de “parte finita” del número y β el de “parte infinitesimal”, ya que al realizar el producto de dos números duales se “desprecian” los infinitésimos de segundo orden, es decir, los términos en ε^2 .

Vamos a definir la norma de un elemento de la \mathbb{R} -álgebra de la forma habitual, a partir del término independiente de su polinomio mínimo, $((-1)^n(a_0)^s, s = \frac{n}{r})$.

Proposición 3 Sea Φ un homomorfismo de \mathbb{R} -álgebras entre dos extensiones algebraicas de \mathbb{R} , \mathbb{K}_1 y \mathbb{K}_2 . Son equivalentes:

1. Φ es inyectivo.
2. $\forall z \in \mathbb{K}_1$, el polinomio mínimo de z es el mismo que el de $\Phi(z)$.

Corolario 1 Un isomorfismo de \mathbb{R} -álgebras deja invariante la norma y la traza.

Definición 2 Sea $z \in \mathbb{K}$, llamamos módulo de z a

$$|z| = \sqrt{\text{Norma}(z)}$$

en el caso de existir.

En cada una de estas \mathbb{R} -álgebras, las expresiones para los módulos son:

- $|\alpha + i\beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
- $|\alpha + j\beta| = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$
- $|\alpha + \varepsilon\beta| = |\alpha|$

Proposición 4 Si \mathbb{K} es una extensión de grado 2, la correspondencia

$$|\cdot| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

verifica:

1. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{K}$.
2. $|\lambda z| = |\lambda| |z|, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } z \in \mathbb{K}$.
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{K}$.

Obviamente siempre que estas normas existan.

El corolario también nos indica que para la elección de la norma en una \mathbb{R} -álgebra de dimensión 2 solamente hay las tres opciones vistas para los casos de \mathbb{C} , \mathbb{P}_C y \mathbb{D} . Cosa que sugiere, a la vista de las expresiones para los módulos, una conexión con el hecho de que solamente hay tres tipos de formas cuadráticas en dimensión dos, según su rango y su signatura proyectiva:

- Rango 2 y signatura 2: caso \mathbb{C} .
- Rango 2 y signatura 0: caso \mathbb{P}_C .
- Rango 1 y signatura 1: caso \mathbb{D} .

Así pues, a partir de ahora podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la \mathbb{R} -álgebra \mathbb{K} , extensión de grado 2 del cuerpo real, es alguna de las tres \mathbb{R} -álgebras \mathbb{C} , \mathbb{M} o \mathbb{D} .

Definición 3 Sea $z = \alpha + \xi\beta \in \mathbb{K}$, el conjugado de z es $\bar{z} = \alpha - \xi\beta$.

Nota 5 Obsérvese que la correspondencia de conjugación

$$\begin{array}{ccc} \bar{} : \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{array}$$

verifica:

C1 $\bar{}$ es \mathbb{R} lineal

C2 $\overline{1_{\mathbb{K}}} = 1_{\mathbb{K}}$

C3 $\overline{\bar{z}} = z$

C4 $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

y que, recíprocamente, si una aplicación verifica esas 4 propiedades es la conjugación.

Definición 4 Llamamos casi cuerpo a un anillo normado en el que los elementos inversibles coinciden con los elementos con norma no nula.

Proposición 5 Las extensiones de grado 2 de los números reales son casi cuerpos.

Corolario 2 La primera parte de la nota anterior nos da una expresión explícita para divisores de cero e inversos:

- Si z es divisor de cero, $z \cdot z' = 0$ si y sólo si $z' = \lambda\bar{z}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Si z es inversible,

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Nota 6 En el caso $n = 2$, identificando el plano \mathbb{R}^2 con cada una de las extensiones \mathbb{C} , \mathbb{M} y \mathbb{D} , los divisores de cero son:

- Caso \mathbb{C} , no hay divisores. Por abuso de lenguaje, viendo \mathbb{C} como \mathbb{R}^2 , son las dos rectas imaginarias $x^2 + y^2 = 0$.

- Caso \mathbb{M} , son las dos rectas $x^2 - y^2 = 0$, que son las dos rectas que pasan por el origen y tienen pendientes ± 1 . Además, para que el producto de dos puntos valga 0, cada uno de ellos debe estar en una de esas dos rectas.
- Caso \mathbb{D} , es la recta doble $x^2 = 0$. Además ahora para que el producto sea cero los dos puntos tienen que estar en esa recta.

Proposición 6 Sean $\mathbb{K} = \frac{\mathbb{R}[x]}{f(x)}$ y $\Phi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ un homomorfismo de \mathbb{R} -álgebras. Son equivalentes:

1. Φ es un automorfismo.
2. Existen $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{K}$, con $m_{\xi_1} = m_{\xi_2} = f(x)$ tales que $\Phi(\xi_1) = \xi_2$.

Corolario 3 Los únicos automorfismos en \mathbb{C} , \mathbb{M} y \mathbb{D} son la identidad y la conjugación.

Proposición 7 Sea $\Phi : \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$ un homomorfismo de \mathbb{R} -álgebras, $z, z' \in \mathbb{K}_1$. Si $z(z')^{-1} \in \mathbb{R}$, entonces $\Phi(z)\Phi(z')^{-1} \in \mathbb{R}$ y $\Phi(z)\Phi(z')^{-1} = z(z')^{-1}$. Además, si Φ es inyectiva, $z(z')^{-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Phi(z)\Phi(z')^{-1} \in \mathbb{R}$.

3. Razón doble

Definición 5 Dados $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{K}$ con $z_i = \alpha_i + \xi\beta_i$, tales que $(z_i - z_j)$ no es divisor de cero para $i \neq j$, llamamos razón doble de esos 4 puntos a:

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

Nota 7 La razón doble de estos 4 puntos siempre está definida sea cual sea la ordenación que elijamos.

La condición sobre los puntos en la definición anterior se traduce geométricamente (identificando \mathbb{K} con \mathbb{R}^2) en:

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la razón doble está definida si los cuatro puntos son distintos.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}$, la razón doble está definida siempre que no haya dos puntos que estén en rectas de pendientes ± 1 .
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{D}$, la razón doble está definida siempre que dos puntos no estén en rectas paralelas al eje y .

Definición 6 Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{K}$, tales que $z_i - z_j$ no es divisor de cero, para $i \neq j$. Llamamos ciclo determinado por z_1, z_2 y z_3 a los números $z_4 \in \mathbb{K}$ tales que

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$$

Identificando \mathbb{K} con \mathbb{R}^2 , obviamente los ciclos son cónicas en \mathbb{R}^2 , ya que vienen descritos por una ecuación algebraica de grado 2. Vamos a ver qué tipo de cónica son, en cada caso.

Proposición 8 *El ciclo determinado por tres puntos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{K} \simeq \mathbb{R}^2$, es una recta si z_1, z_2 y z_3 están alineados y si no:*

- Una circunferencia, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- Una hipérbola equilátera, si $\mathbb{K} = \mathbb{M}$.
- Una parábola con eje de pendiente 0, si $\mathbb{K} = \mathbb{D}$.

Además, existe una correspondencia biunívoca entre los tríos de números en \mathbb{K} que determinan un ciclo y el conjunto de rectas y cónicas anteriores, salvo...

Proposición 9 *Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{K}$ los puntos de un ciclo y Φ un homomorfismo de \mathbb{K} , se tiene que $\Phi(z_1), \Phi(z_2), \Phi(z_3), \Phi(z_4)$ están en un ciclo y además*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [\Phi(z_1), \Phi(z_2), \Phi(z_3), \Phi(z_4)].$$

Corolario 4 *La conjugación conserva la razón doble de puntos de un ciclo.*

Identificando \mathbb{K} con \mathbb{R}^2 puedo definir una aplicación inyectiva de \mathbb{K} en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, explícitamente (eligiendo la recta $x_0 = 0$, como infinito):

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \hookrightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \\ \alpha + \xi\beta & \longmapsto & [1, \alpha, \beta] \end{array}$$

Proposición 10 *Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{K}$ los puntos del ciclo \mathcal{C}*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [\Psi(z_1), \Psi(z_2), \Psi(z_3), \Psi(z_4)]_{\Psi(\mathcal{C})}$$

donde el subíndice $\Psi(\mathcal{C})$ significa que es la razón doble de 4 puntos en la cónica $\Psi(\mathcal{C}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

4. Espacios proyectivos sobre casi cuerpos

Proposición 11 *Sea \mathbb{K} un casi cuerpo. \mathbb{K}^n tiene estructura natural de \mathbb{K} -módulo libre.*

Sea $\mathbb{K}_0^n = \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n : \exists \lambda \in \mathbb{K} \lambda \neq 0 \text{ tal que } \lambda \mathbf{v} = \mathbf{0} \in \mathbb{K}^n\}$. La relación \sim definida en $\mathbb{K}^n \setminus \mathbb{K}_0^n$ por

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ con } \lambda \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

es una relación de equivalencia.

Definición 7 *Llamo espacio proyectivo asociado al \mathbb{K} -módulo \mathbb{K}^n a*

$$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1} = \frac{\mathbb{K}^n \setminus \mathbb{K}_0^n}{\sim}$$

Voy a llamar punto a cada clase del cociente anterior y la denotaré con corchetes.

4.1. Referencias en $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$

Definición 8 Diremos que $A = [a_0, a_1], B = [b_0, b_1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ son un par de puntos fuertemente independientes si $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$ es un elemento inversible de \mathbb{K} .

Nota 8 La definición anterior es independiente del representante elegido.

Proposición 12 Sean A y B un par de puntos fuertemente independientes. Entonces para todo $C \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ existen $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{K}$ tales que, si $A = [a_0, a_1], B = [b_0, b_1], C = [c_0, c_1]$, entonces

$$[c_0, c_1] = [\gamma_1 a_0 + \gamma_2 b_0, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_1].$$

El par (γ_1, γ_2) es único salvo producto por unidades.

Definición 9 Diremos que tres puntos A, B y C de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ forman una referencia si A y B son fuertemente independientes y existen representantes de los tres puntos tales que $(c_0, c_1) = (a_0, a_1) + (b_0, b_1)$.

Proposición 13 Son equivalentes:

1. $\{A, B, C\}$ es una referencia.
2. A y B son fuertemente independientes y existen γ_1, γ_2 inversibles tales que

$$(c_0, c_1) = \gamma_1(a_0, a_1) + \gamma_2(b_0, b_1).$$

3. $\{A, B\}, \{A, C\}$ y $\{B, C\}$ son fuertemente independientes.

4.2. Projectividades en $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$

Sea M una matriz 2×2 de elementos de \mathbb{K} ; defino la correspondencia:

$$\psi_M : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \\ [x_0, x_1] & \longmapsto & [y_0, y_1] \end{array}$$

dada por

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Nota 9 Dos matrices inducen la misma correspondencia si y sólo si $M = \rho N$, con ρ un elemento inversible de \mathbb{K} .

Proposición 14 Si $\det(M) \in \mathbb{K}^*$, entonces la correspondencia ψ_M es una aplicación bien definida.

Proposición 15 La aplicación dada por una matriz M lleva pares de puntos fuertemente independientes en pares fuertemente independientes si y solo si el determinante de M es inversible.

Proposición 16 Sea $\{A, B, C\}$ una referencia, entonces $\forall X \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ existen (α, β) , únicos salvo producto por unidades, tales que

$$\begin{aligned}(c_0, c_1) &= (a_0, a_1) + (b_0, b_1) \\ (x_0, x_1) &= \alpha(a_0, a_1) + \beta(b_0, b_1).\end{aligned}$$

Definición 10 En las condiciones anteriores, llamo razón doble proyectiva a

$$[A, B, C, X]_{\mathbb{P}} = \frac{\alpha}{\beta},$$

siempre que α y β sean inversibles.

Nota 10 Por la proposición 14, la razón doble está definida siempre que los 4 puntos sean fuertemente independientes 2 a 2.

Nota 11 Puedo sumergir la extensión \mathbb{K} en la recta proyectiva, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbb{K} &\hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \\ z &\mapsto [1, z].\end{aligned}$$

Proposición 17 Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{K}$, $z_1 - z_2$ es inversible si y sólo si $[1, z_1]$ y $[1, z_2]$ son fuertemente independientes.

Proposición 18 Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{K}$. Entonces,

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [[1, z_1], [1, z_2], [1, z_3], [1, z_4]]_{\mathbb{P}}.$$

Definición 11 Sean A, B y C tres puntos fuertemente independientes de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$. El ciclo de la recta proyectiva $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ determinado por los puntos A, B y C son los puntos $D \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ tales que $[A, B, C, D] \in \mathbb{R}$.

Proposición 19 Sean $\{A, B, C\}$ y $\{D, E, F\}$ dos referencias, entonces existe una única aplicación ψ_M con $\det(M)$ inversible que manda una referencia en otra.

Proposición 20 Si $\det(M)$ es inversible la aplicación ψ_M conserva la razón doble.

Proposición 21 Las aplicaciones ψ_M llevan ciclos en ciclos.

5. Cuádricas

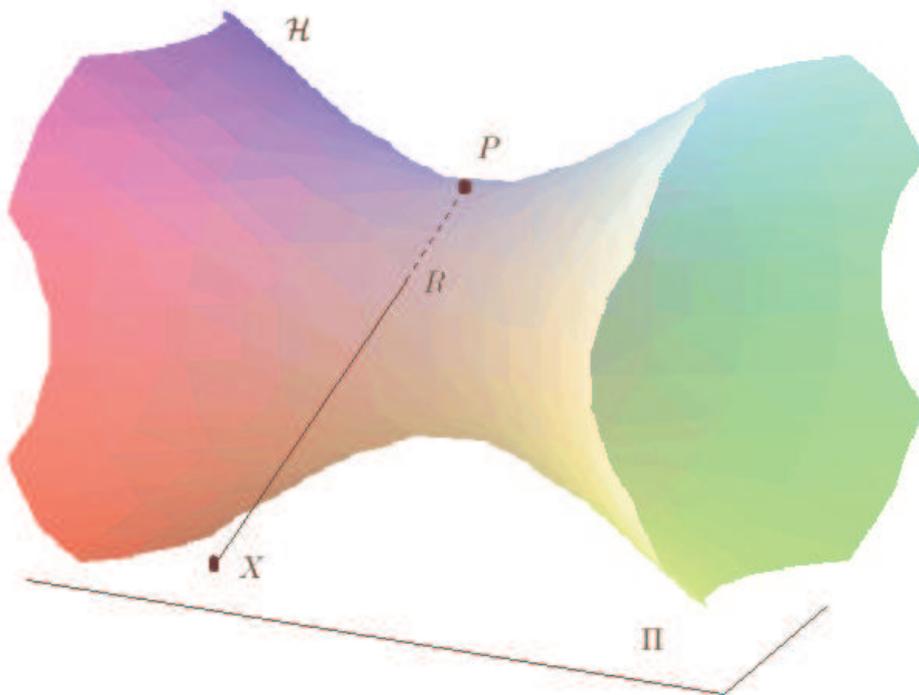


Figura 1: Proyección estereográfica

Proposición 22 Sean $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ el espacio proyectivo real n -dimensional, $[Q]$ una cuádrica real e irreducible de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, P un punto de la cuádrica que no esté en el vértice, Π un hiperplano de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ que no contiene a P y X un punto de Π . Entonces:

- 1) $(P + X) \cap [Q] = P$ si y sólo si $X \in P^{\perp} \setminus [Q]$.
- 2) $(P + X) \cap [Q] = \{P, R\}$ con $R \neq P$, si y sólo si $X \notin P^{\perp}$.
- 3) $(P + X) \subset [Q]$ si y sólo si $X \in P^{\perp} \cap [Q]$.

Nota 12 Por el apartado 3) de la proposición, si $R \in P^{\perp} \cap [Q]$ con $R \neq P \Rightarrow P + R \subset [Q]$.

Así pues para un $P \in [Q] \setminus V_{[Q]}$, $P^{\perp} \cap [Q]$ se reduce a P o es un cono con vértice P .

Definición 12 Se llama proyección estereográfica de $[Q]$ sobre Π con polo en P a la correspondencia

$$\alpha : [Q] \longrightarrow \Pi$$

$$\alpha(R) = (P + R) \cap \Pi.$$

Proposición 23 $\alpha|_{[Q] \setminus P^{\perp}}$ es biyectiva sobre su imagen, que es $\Pi \setminus P^{\perp}$.

Corolario 5 $[Q]$ es una compactificación de \mathbb{R}^{n-1} .

Nota 13 La cuádrlica $[Q]$ es homeomorfa a \mathbb{R}^{n-1} junto con el cono $P^\perp \cap [Q]$.

$$[Q] \simeq \mathbb{R}^{n-1} \sqcup (P^\perp \cap [Q])$$

5.1. Secciones planas, ciclos

Vamos a realizar ahora un estudio sintético de las proyecciones de las secciones de $[Q]$ por planos, que nos permitirá dar una definición geométrica de los ciclos.

Proposición 24 Sean $[Q]$ una cuádrlica de $\mathbb{P}_\mathbb{R}^3$, $P \in [Q] \setminus V_{[Q]}$, Γ y Π dos planos de $\mathbb{P}_\mathbb{R}^3$ con $P \notin \Pi$, $S_\Gamma = \Gamma \cap [Q]$ y α la proyección estereográfica de $[Q]$ sobre Π con polo en P . Entonces:

1. Si $P \in \Gamma$,

a) Si $\Gamma = P^\perp$, entonces

$$\alpha(S_\Gamma) = \begin{cases} \{I_1^{(i)}, I_2^{(i)}\} & \text{si } [Q] = [\mathcal{S}] \\ \{I_1, I_2\} & \text{si } [Q] = [\mathcal{H}] \\ \{I_0\} & \text{si } [Q] = [\mathcal{C}] \end{cases}$$

b) Si $r_i \subseteq \Gamma$ para un i , entonces $\alpha(S_\Gamma)$ es una recta que pasa por I_i .

c) Si $r_i \not\subseteq \Gamma \forall i$, entonces $\alpha(S_\Gamma)$ es una recta menos un punto que está en $P^\perp \cap \Pi$.

2. Si $P \notin \Gamma$,

a) Si Γ es tangente a $[Q]$ entonces

$$\alpha(S_\Gamma) = \begin{cases} \text{Un punto} & ([\mathcal{S}]) \\ \text{Dos rectas que pasan por } I_1 \text{ e } I_2, \text{ resp.} & ([\mathcal{H}]) \\ \text{Una recta que pasa por } I_0 & ([\mathcal{C}]) \end{cases}$$

b) Si Γ pasa por el vértice de $[Q]$ (caso cuádrlica degenerada), entonces $\alpha(S_\Gamma)$ es dos rectas (reales o imaginarias) que se cortan en el vértice, que es un punto de $P^\perp \cap \Pi$.

c) Si Γ no es tangente a $[Q]$ entonces

$$\alpha(S_\Gamma) = \begin{cases} \text{Cónica que corta a } P^\perp \cap \Pi \text{ en } I_1^{(i)} \text{ e } I_2^{(i)} \text{ (ptos. imag.)} & ([\mathcal{S}]) \\ \text{Cónica que corta a } P^\perp \cap \Pi \text{ en } I_1 \text{ e } I_2 & ([\mathcal{H}]) \\ \text{Cónica que corta a } P^\perp \cap \Pi \text{ en } I_0 & ([\mathcal{C}]) \end{cases}$$

Proposición 25 Recíprocamente:

- La contraimagen de una recta distinta de $P^\perp \cap \Pi$ es la sección por un plano que pasa por P , no es tangente a la cuádrica y no pasa por el vértice.
- La contraimagen de una cónica no degenerada que corta a $P^\perp \cap \Pi$ en:
 1. $I_1^{(i)}$ e $I_2^{(i)}$. (Proyección desde $[\mathcal{S}]$)
 2. I_1 e I_2 . (Proyección desde $[\mathcal{H}]$)
 3. I_0 (punto doble). (Proyección desde $[\mathcal{C}]$)

es la sección por un plano que no pasa por P , no es tangente a la cuádrica y no pasa por el vértice.

Nota 14 En el caso del cono, la proyección de una sección por un plano que contenga a r_0 , de un plano tangente y de un plano que pasa por el vértice es la misma recta que pasa por I_0 ; pero nosotros nos estamos fijando ahora sólo en las secciones por planos no tangentes a la cuádrica y que no pasen por el vértice.

5.1.1. Definición geométrica de ciclo

Definición 13 Llamamos ciclos no degenerados a las proyecciones de las secciones por planos no tangentes a la cuádrica y que no pasen por el vértice (caso cuádrica degenerada).

Sea \mathcal{I} un plano de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ que contenga a la recta $P^\perp \cap \Pi$ y que no pase por P . (Obsérvese que ese plano en el caso del cono contiene al vértice). Es claro que $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \setminus \mathcal{I} \simeq \mathbb{R}^3$ y que $\Pi \setminus \mathcal{I} \simeq \mathbb{R}^2$.

Así pues, si nos restringimos a esta carta afín tenemos la proyección estereográfica:

$$\alpha_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

y la recta $P^\perp \cap \Pi$ en la que señalábamos los puntos antes va a ser la recta del infinito para el plano afín.

Sea \mathbb{E} el plano euclídeo usual sumergido en el plano proyectivo. Vamos a ver qué tipo de cónicas son los ciclos definidos anteriormente, para cada uno de los tres casos, vistos como cónicas en el plano euclídeo \mathbb{E} .

Proposición 26 Sea una cónica en \mathbb{E} , real no degenerada y con centro. Sus dos puntos de corte con la recta del infinito, reales o imaginarios, determinan de forma unívoca las direcciones de los ejes, así como la excentricidad de la cónica.

Nota 15 En las condiciones anteriores, si la cónica:

- Pasa por los puntos cíclicos $I_1^{(i)} = [0, 1, i]$ e $I_2^{(i)} = [0, 1, -i]$ es una circunferencia.
- Pasa por los puntos $P_1 = [0, 1, 1]$ y $P_2 = [0, 1, -1]$ es una hipérbola equilátera.

Proposición 27 *Las proyecciones de secciones por planos no tangentes y que no pasen por el vértice (ciclos):*

- *Son rectas si el plano pasa por P .*
- *Son cónicas no degeneradas si el plano no pasa por P :*
 1. *Elipses con ejes paralelos y misma excentricidad, caso \mathcal{S} .*
 2. *Hipérbolas con asíntotas paralelas (ejes paralelos y misma excentricidad), caso \mathcal{H} .*
 3. *Parábolas con ejes paralelos, caso \mathcal{C} .*

Proposición 28 *En las condiciones anteriores:*

1. *Caso \mathcal{S} : Tres puntos distintos de \mathbb{R}^2 determinan un único ciclo.*
2. *Caso \mathcal{H} : Tres puntos distintos de \mathbb{R}^2 tales que, si dos de ellos están en una recta de pendiente dada por I_1 o I_2 , entonces el tercero también determinan un único ciclo.*
3. *Caso \mathcal{C} : Tres puntos distintos de \mathbb{R}^2 tales que, si dos de ellos están en una recta de pendiente dada por I_0 , entonces el tercero también determinan un único ciclo.*

Observemos que tres puntos del plano determinan un ciclo, análogamente a lo visto para las álgebras, y que los ciclos son los mismos, correspondiéndose \mathbb{C} con $[\mathcal{S}]$, \mathbb{P}_C con $[\mathcal{H}]$ y \mathbb{D} con $[\mathcal{C}]$.

5.2. Rectas proyectivas y cuádricas

Sean $[\mathcal{S}]$, $[\mathcal{H}]$ y $[\mathcal{C}]$ las cuádricas reales irreducibles de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$, P un punto de ellas que no está en el vértice, Π un plano tangente a la cuádrica que no pasa por P y α la proyección estereográfica de la cuádrica sobre el plano con polo P .

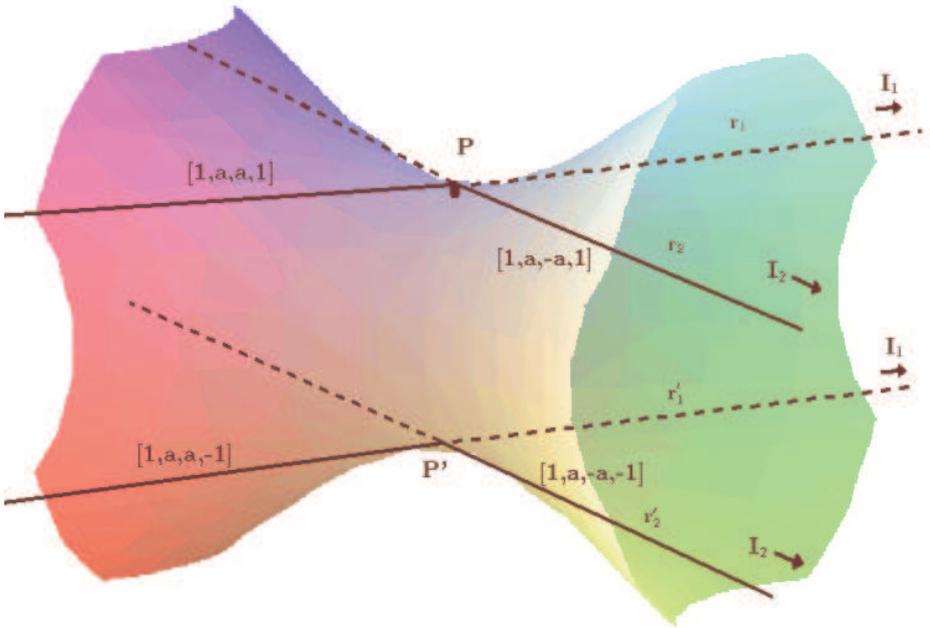
Vamos a ver ahora cómo las rectas proyectivas que hemos construido a partir de las extensiones de grado dos son justamente estas cuádricas.

Proposición 29 *Se tiene que:*

- $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es homeomorfo a $[\mathcal{S}]$.
- $\mathbb{P}_{\mathbb{M}}^1$ es homeomorfo a $[\mathcal{H}]$.
- $\mathbb{P}_{\mathbb{D}}^1$ es homeomorfo a $[\mathcal{C}] \setminus V_{[\mathcal{C}]} = [\mathcal{C}] \setminus \{I_0\}$.

Sean $[Q]$ una de las tres cuádricas anteriores y P' el punto $[1, 0, 0, -1] = \Pi^\perp$.

Llamaremos a los abiertos $U_1 = [Q] \setminus P^\perp$ y $U_2 = [Q] \setminus P'^\perp$ las cartas de la cuádrica.



Observemos que los puntos del infinito del plano $\Pi = P^\perp$ que están en la cuádrlica $[Q]$ (cuádrlica degenerada del infinito que define la métrica) son:

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}] \cap P^\perp \cap P'^\perp &= \{I_1^i, I_2^i\} \\ [\mathcal{H}] \cap P^\perp \cap P'^\perp &= \{I_1, I_2\} \\ [\mathcal{C}] \cap P^\perp \cap P'^\perp &= I_0 \end{aligned}$$

Así pues, cada una de las cuádrlicas es la unión de las dos cartas junto con esta cuádrlica degenerada.

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}] &= U_1 \cup U_2 \\ [\mathcal{H}] &= U_1 \cup U_2 \sqcup \{I_1, I_2\} \\ [\mathcal{C}] &= U_1 \cup U_2 \sqcup \{I_0\} \end{aligned}$$

Sean φ_1 y φ_2 , para cada una de las tres cuádrlicas, los homeomorfismos:

$$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{A}$$

de proyección estereográfica desde el punto P sobre el plano afín $\Pi \setminus P^\perp$.

Si $x \in [Q]$ con $\varphi_1(x)$ divisor de cero, entonces $x \in P'^\perp$.

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \quad U_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{A} \\ \text{Si } x \notin P^\perp &\longmapsto \varphi_1(x)^{-1} = \frac{\overline{\varphi_1(x)}}{|\varphi_1(x)|^2} \\ P &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Extiendo la definición de φ_2 a los puntos de $P^\perp \setminus \{P\}$ para que φ_2 sea continua:

- Caso $[\mathcal{H}]$. ($a \neq 0$)

$$[1, a, a, 1] = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_1^{-1}(t + j(t - \frac{2}{a}))$$

$$[1, a, -a, 1] = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_1^{-1}(t + j(-t - \frac{2}{a}))$$

entonces

$$\varphi_2([1, a, a, 1]) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_2(\varphi_1^{-1}(t + j(t - \frac{2}{a}))) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t + j(t - \frac{2}{a})} =$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t - j(t - \frac{2}{a})}{-\frac{4}{a^2} + \frac{4t}{a}} = \frac{a}{4} - j\frac{a}{4}$$

$$\varphi_2([1, a, -a, 1]) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_2(\varphi_1^{-1}(t + j(-t - \frac{2}{a}))) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t + j(-t - \frac{2}{a})} =$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t - j(-t - \frac{2}{a})}{-\frac{4}{a^2} - \frac{4t}{a}} = -\frac{a}{4} - j\frac{a}{4}$$

- Caso $[\mathcal{C}]$.

$$[1, 0, a, 1] = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_1^{-1}(t + j\varepsilon\frac{a}{4}t^2)$$

entonces

$$\varphi_2([1, 0, a, 1]) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t + \varepsilon\frac{a}{4}t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t - \varepsilon\frac{a}{4}t^2}{t^2} = -\varepsilon\frac{a}{4}$$

Lema 1 Para cada uno de los tres anillos:

1. $\mathbb{C}_0^2 = (0, 0)$
2. $\mathbb{M}_0^2 = \{(a + ja, b + jb), (a - ja, b - jb) : a, b \in \mathbb{R}\}$
3. $\mathbb{D}_0^2 = \{(a\varepsilon, b\varepsilon) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Lema 2 1. Sea $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, para todo $\lambda \in \mathbb{M}^*$

$$\lambda(a + ja) = \alpha + j\alpha$$

$$\lambda(a - ja) = \alpha - j\alpha$$

con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Sean $a, b, a', b' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{P}_C^*$ únicos tales que

$$\lambda_1(a + ja) = a' + ja'$$

$$\lambda_1(b - jb) = b' - jb'$$

$$\lambda_2(a - ja) = a' - ja'$$

$$\lambda_2(b + jb) = b' + jb'$$

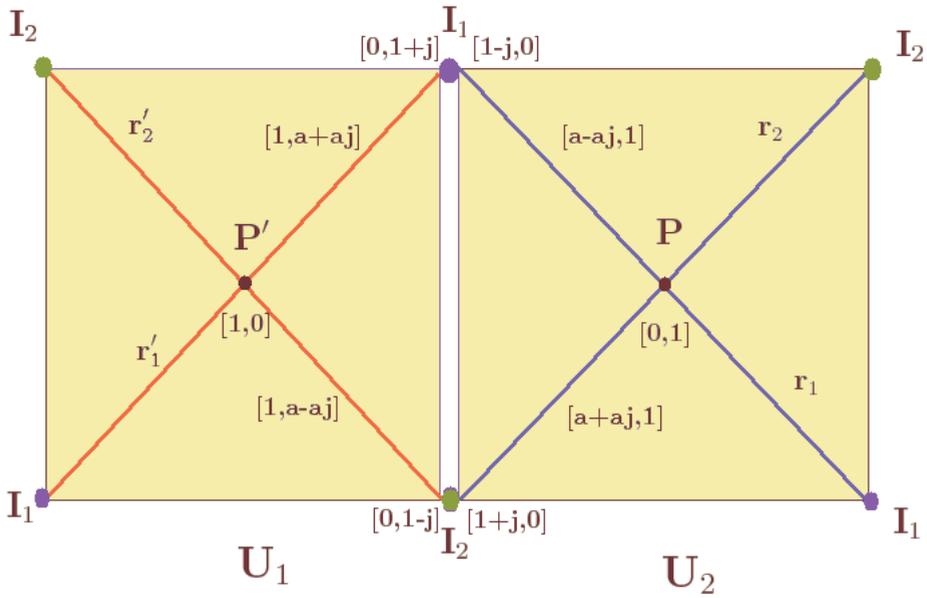


Figura 2: Esquema de las cartas para $[\mathcal{H}]$

Nota 16 *A partir de lo anterior es fácil ver que*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 &= \{[1, z_1] : z_1 \in \mathbb{C}\} \cup \{[z_0, 1] : z_0 \in \mathbb{C}\} \\ \mathbb{P}_{\mathbb{M}}^1 &= \{[1, z_1] : z_1 \in \mathbb{M}\} \cup \{[z_0, 1] : z_0 \in \mathbb{M}\} \cup \{[1+j, 1-j], [1-j, 1+j]\} \\ \mathbb{P}_{\mathbb{D}}^1 &= \{[1, z_1] : z_1 \in \mathbb{D}\} \cup \{[z_0, 1] : z_0 \in \mathbb{D}\} \end{aligned}$$

Referencias

- [1] J.M. Aroca, M.J. Fdez. Bermejo, *Notas de geometría proyectiva*. Preprint UVA, 2003.
- [2] A. Cayley, “A Sixth Memoir upon Quantics”. *Phil. Trans. Royal Society London* **149**, pag. 61–90, 1859.
- [3] *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*. Tome III, volume I, “Fondements de la Géométrie générale”. Ed. Jacques Gabay, 1991. (Reedición)
- [4] F. Klein, *Geometría elemental desde un punto de vista superior*. Ed. CSIC, Madrid, 1954.
- [5] F. Klein, “Über die Sogenannte nicht Euklidische Deometrie”. *Mathematische Annalen* **4**, pag. 254–305, 1871.

- [6] F. Klein, *Vorlesungen über nicht Euklidische Geometrie*. Ed. Chelsea, Nueva York, 1967. (Reedición)
- [7] S. Mazuelas Franco, “Proyecciones estereográficas y Geometrías en el plano” *Boletín Sociedad Puig Adam* **75**, pag. 37–54, 2007.
- [8] J. Rey Pastor, *Fundamentos de la Geometría Proyectiva Superior*. Junta para la ampliación de estudios e investigaciones científicas, 1916.

PROPRIÉTÉS DE RÉGULARITÉ DES MORPHISMES D'ALGÈBRES ANALYTIQUES

par

Guillaume Rond

Résumé. — Nous faisons un survol des propriétés de régularité des morphismes d'algèbres analytiques. En particulier nous étudions la conservation de l'injectivité d'un morphisme d'algèbres analytiques par passage aux complétés.

1. Préliminaires

1.1. Séries convergentes et théorème de préparation. —

Définition 1.1. — Soit \mathbb{k} un corps valué (pas nécessairement complet) et soit $n \in \mathbb{N}$. Une série formelle $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]$ est dite convergente si il existe une constante $R > 0$ telle que

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |f_\alpha| R^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} < +\infty.$$

Le sous-ensemble de $\mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]$ formé des séries convergentes est un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]$, et est noté $\mathbb{k}\{x_1, \dots, x_n\}$.

On notera \mathcal{O}_n l'anneau $\mathbb{k}\{x_1, \dots, x_n\}$ et \mathcal{F}_n l'anneau $\mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]$ quand aucune confusion ne sera possible.

Définition 1.2. — Soit \mathbb{k} un corps valué. Une algèbre analytique sur \mathbb{k} est une \mathbb{k} -algèbre A isomorphe à un quotient \mathcal{O}_n/I où $n \in \mathbb{N}$ et I est un idéal propre de \mathcal{O}_n .

Une \mathbb{k} -algèbre formelle est une \mathbb{k} -algèbre A isomorphe à un quotient \mathcal{F}_n/I où $n \in \mathbb{N}$ et I est un idéal propre de \mathcal{F}_n .

Les algèbres analytiques et formelles sont des anneaux locaux noethériens [Ho].

Si A est un anneau local on notera \mathfrak{m}_A son idéal maximal, et \widehat{A} son complété pour la topologie \mathfrak{m}_A -adique. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux locaux (i.e. $\varphi(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$), on note $\widehat{\varphi} : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ le morphisme d'anneaux locaux induit par completion.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.3 (Théorème de préparation de Weierstrass)

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{O}_n$ tels que $f(0, \dots, 0, x_n) = x_n^d g(x_n)$ avec $g(0) \neq 0$. Alors il existe $a_i \in \mathcal{O}_{n-1}$, pour $0 \leq i \leq d-1$, avec $a_i(0) = 0$ pour tout i , et $u(x) \in \mathcal{O}_n$ avec $u(0) \neq 0$ tels que

$$f(x_1, \dots, x_n) = u(x_1, \dots, x_n) (x_n^d + a_{d-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^{d-1} + \dots + a_0(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

De plus une telle écriture est unique.

Le résultat analogue reste vrai si l'on remplace respectivement \mathcal{O}_n et \mathcal{O}_{n-1} par \mathcal{F}_n et \mathcal{F}_{n-1} .

Définition 1.4. — On appelle polynôme de Weierstrass de degré d en la variable x_n tout élément $f \in \mathcal{O}_n$ tel que

$$f = x_n^d + a_{d-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^{d-1} + \dots + a_0(x_1, \dots, x_{n-1})$$

avec $a_i(0) = 0$ pour $1 \leq i \leq p-1$.

Remarque 1.5. — Soit $f \in \mathbb{k}[[x_1, \dots, x_{n-1}]][[x_n]]$ un polynôme de Weierstrass en la variable x_n . Alors il existe $u \in \mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]$ inversible tel que $uf \in \mathbb{k}\{x_1, \dots, x_n\}$ si et seulement si $f \in \mathbb{k}\{x_1, \dots, x_n\}$. Ceci résulte de l'unicité de la décomposition de Weierstrass de uf .

Théorème 1.6 (Théorème de division de Weierstrass)

Soient $f \in \mathcal{O}_n$ et $g \in \mathcal{O}_n$ un polynôme de Weierstrass de degré d en la variable x_n . Alors il existe $q \in \mathcal{O}_n$ et $r \in \mathcal{O}_n$, r étant un polynôme de Weierstrass en x_n de degré inférieur strictement à g , tels que $f = qg + r$.

Le résultat analogue reste vrai si l'on remplace respectivement \mathcal{O}_n et \mathcal{O}_{n-1} par \mathcal{F}_n et \mathcal{F}_{n-1} .

Théorème 1.7 (Théorème de préparation de Weierstrass bis)

Soient A et B deux algèbres analytiques (resp. formelles) sur un corps \mathbb{k} valué. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme de \mathbb{k} -algèbres locales. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) B est finie sur A (i.e. B est un A -module de type fini par φ).
- ii) B est quasi-finie sur A (i.e. $B/\mathfrak{m}_A B$ est un espace vectoriel de dimension finie sur A/\mathfrak{m}_A).

1.2. Propriétés conservées par passage aux complétés [Ho]. —

Corollaire 1.8. — Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'algèbres analytiques. Alors B est finie sur A si et seulement si \widehat{B} est finie sur \widehat{A} .

Démonstration. — En effet, d'après le théorème 1.7, B est finie sur A si et seulement si B/\mathfrak{m}_B est finie sur A/\mathfrak{m}_A . Or $\widehat{B}/\widehat{\mathfrak{m}}_{\widehat{B}} \simeq B/\mathfrak{m}_B$ et $\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}_{\widehat{A}} \simeq A/\mathfrak{m}_A$. En appliquant alors le théorème de préparation pour les algèbres de séries formelles, on obtient le résultat. \square

Corollaire 1.9. — Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'algèbres analytiques. Alors

- i) φ est surjectif si et seulement si $\widehat{\varphi}$ est surjectif.
- ii) Si $\widehat{\varphi}$ est injectif, alors φ est injectif.

iii) φ est un isomorphisme si et seulement si $\widehat{\varphi}$ l'est.

Démonstration. — Tout d'abord, si φ ou $\widehat{\varphi}$ est surjectif, alors B est finie sur A ou \widehat{B} est finie sur \widehat{A} , et donc B est finie sur A et \widehat{B} est finie sur \widehat{A} d'après le corollaire précédent. Comme $B/\mathfrak{m}_B \simeq \widehat{B}/\mathfrak{m}_{\widehat{B}}$ en utilisant le lemme de Nakayama on obtient la première assertion.

Si $\widehat{\varphi}$ est injectif, φ est alors clairement injectif.

Si φ est un isomorphisme alors $\widehat{\varphi}^{-1}$ est l'inverse de $\widehat{\varphi}$ qui est donc un isomorphisme. Si $\widehat{\varphi}$ est un isomorphisme, alors φ est injectif et surjectif d'après ce qui précède, donc φ est un isomorphisme. \square

Dans [Gr], Grothendieck conjecture qu'un morphisme injectif d'algèbres analytiques induit toujours un morphisme injectif sur les complétés. Plus généralement, on peut se demander si un morphisme injectif $\varphi : A \rightarrow B$ d'algèbres analytiques vérifie $\widehat{\varphi}^{-1}(A) = B$. Un problème similaire est de savoir, lorsque l'image d'une série formelle est convergente, si c'est alors l'image d'une série convergente : i.e. si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme d'algèbres analytiques, a-t-on toujours $\widehat{\varphi}(\widehat{A}) \cap B = \varphi(A)$? Il faut attendre le papier [Ga] de A. Gabriélov pour avoir une réponse qui se trouve être négative à ces questions. Le but de cet article est de donner une présentation des réponses connues (négatives en général, positives dans certains cas) à ces questions.

1.3. Fonction de Chevalley. — Dans l'article [Ch] est montré le résultat suivant :

Théorème 1.10 (lemme de Chevalley). — Soit (A, \mathfrak{m}) un anneau local complet et soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante d'idéaux de A telle que $\bigcap_n I_n = (0)$. Alors il existe une fonction $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_{\lambda(n)} \subset \mathfrak{m}^n$.

On en déduit alors le résultat suivant (en appliquant le théorème précédent à la suite $(\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B^n))_n$ d'idéaux de $A/\text{Ker}(\widehat{\varphi})$) :

Corollaire 1.11. — Soit $\widehat{\varphi} : A \rightarrow B$ un morphisme d'algèbres formelles sur \mathbb{k} . Alors il existe une fonction $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B^{\lambda(n)}) \subset \text{Ker}(\widehat{\varphi}) + \mathfrak{m}_A^n.$$

La plus petite fonction λ vérifiant cette relation est appelée fonction de Chevalley du morphisme $\widehat{\varphi}$. C'est une fonction croissante $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Une question naturelle qui se pose est alors de savoir quelle peut être la croissance de la fonction de Chevalley d'un morphisme d'algèbres formelles.

2. Interprétation en terme d'approximation de Artin cylindrique

Soit $\varphi : \mathbb{k}\{x_1, \dots, x_n\}/I \rightarrow \mathbb{k}\{y_1, \dots, y_m\}$ un morphisme injectif d'algèbres analytiques. Notons $\varphi' : \mathbb{k}\{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{k}\{y_1, \dots, y_m\}$ le morphisme induit. Notons x et y les multi-variables (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_m) . Alors $\widehat{\varphi}$ est injectif si et seulement si $\text{Ker}(\widehat{\varphi}') = I\mathbb{k}[[x]] = \text{Ker}(\varphi')$. Pour étudier la première question,

on peut donc supposer que $\varphi : \mathbb{k}\{x\} \longrightarrow \mathbb{k}\{y\}$ et étudier le problème de savoir quand est-ce que $\text{Ker}(\widehat{\varphi})$ est engendré par $\text{Ker}(\varphi)$.

On peut remarquer que $\text{Ker}(\varphi)\mathbb{k}[[x]] = \overline{\text{Ker}(\varphi)} := \bigcap_{c \in \mathbb{N}} (\text{Ker}(\varphi) + (x)^c \mathbb{k}[[x]])$ est la clôture de $\text{Ker}(\varphi)$ dans $\mathbb{k}[[x]]$ pour la topologie de Krull de cet anneau. Notons $\varphi_i(y) := \varphi(x_i)(y) \in \mathbb{k}\{y\}$ pour $1 \leq i \leq n$. Soit $\bar{f} \in \text{Ker}(\widehat{\varphi})$. Le développement de Taylor de $\bar{f}(x)$ nous donne

$$\bar{f}(x) = \bar{f}(x) - \bar{f}(\varphi(y)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \bar{f}^{(\alpha)}(\varphi(y)) (x_1 - \varphi_1(y))^{\alpha_1} \dots (x_n - \varphi_n(y))^{\alpha_n}.$$

Donc il existe $\bar{g}_i \in \mathbb{k}[[x, y]]$, pour $1 \leq i \leq n$, tels que

$$\bar{f}(x) + \sum_{i=1}^n (x_i - \varphi_i(y)) \bar{g}_i(x, y) = 0.$$

Alors $\bar{f} \in \overline{\text{Ker}(\varphi)}$ si et seulement si pour tout $c \in \mathbb{N}$ il existe $f_c \in \text{Ker}(\varphi)$ tel que $\bar{f}(x) - f_c(x) \in (x)^c$. En regardant le développement de Taylor des f_c , on voit que $\bar{f} \in \overline{\text{Ker}(\varphi)}$ si et seulement si il existe $f_c(x) \in \mathbb{k}\{x\}$ et $g_{i,c}(x, y) \in \mathbb{k}\{x, y\}$, pour tout $c \in \mathbb{N}$, tels que

$$f_c(x) + \sum_{i=1}^n (x_i - \varphi_i(y)) g_{i,c}(x, y) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{N}$$

$$\text{et } f_c(x) - \bar{f}(x) \in (x)^c \quad \forall c \in \mathbb{N}.$$

Considérons maintenant $P(F_i, G_j) \in \mathbb{k}\{x, y\}[F_1, \dots, F_r, G_1, \dots, G_s]$. Nous dirons que P possède la propriété d'approximation cylindrique par rapport à x si :

$$\forall \bar{f}_i \in \mathbb{k}[[x]], \forall \bar{g}_j \in \mathbb{k}[[x, y]], \text{ tels que } P(\bar{f}_i, \bar{g}_j) = 0, \forall c \in \mathbb{N},$$

$$\exists f_i \in \mathbb{k}\{x\}, \exists g_j \in \mathbb{k}\{x, y\} \text{ tels que } P(f_i, g_j) = 0,$$

$$\text{et } \bar{f}_i - f_i \in (x)^c, \bar{g}_j - g_j \in (x, y)^c \text{ pour tous } 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s.$$

On déduit alors de la remarque précédente la proposition suivante (en fait la remarque nous donne légèrement moins que cette proposition ; pour la preuve complète de cette proposition voir [Ro2]) :

Proposition 2.1. — *Soit l'équation suivante :*

$$(E1) \quad F(x) + \sum_{i=1}^n (x_i - \varphi_i(y)) G_i(x, y) = 0$$

Alors $\text{Ker}(\widehat{\varphi}) = \text{Ker}(\varphi)\mathbb{k}[[x]]$ si et seulement si l'équation (E1) possède la propriété d'approximation cylindrique.

On peut généraliser cela de la manière suivante :

Proposition 2.2. — [Ro2] *Soit l'équation suivante :*

$$(E2) \quad F(x) + \sum_{i=1}^n (x_i - p_i(y)) G_i(x, y) + h(y) = 0$$

où $h \in \mathbb{k}\{y\}$. Alors l'équation (E2) possède la propriété d'approximation cylindrique si et seulement si $h \in \varphi(\mathbb{k}\{x\})$.

En particulier toutes les équations (E2), pour $h \in \mathbb{k}\{y\}$, possèdent la propriété d'approximation cylindrique par rapport à x si et seulement si $\widehat{\varphi}(\mathbb{k}[[x]]) \cap \mathbb{k}\{y\} = \varphi(\mathbb{k}\{x\})$.

3. Quelques exemples

3.1. Exemple de Osgood [Os]. — Soit $\varphi : \mathbb{C}\{x_1, x_2, x_3\} \longrightarrow \mathbb{C}\{y_1, y_2\}$ défini par

$$\varphi(x_1) = y_1, \quad \varphi(x_2) = y_1 y_2, \quad \varphi(x_3) = y_1 y_2 e^{y_2}.$$

Soit $f \in \text{Ker}(\widehat{\varphi})$ que l'on écrit sous la forme $f = \sum_{d=0}^{+\infty} f_d$ où f_d est un polynôme homogène de degré d pour tout $d \in \mathbb{N}$. Alors $0 = \widehat{\varphi}(f) = \sum_d y_1^d f_d(1, y_2, y_2 e^{y_2})$. Donc $f_d = 0$ pour tout $d \in \mathbb{N}$ car $1, y_2$ et $y_2 e^{y_2}$ sont algébriquement indépendants sur \mathbb{C} . Donc $\text{Ker}(\widehat{\varphi}) = (0)$ et de même $\text{Ker}(\varphi) = (0)$.

Notons $\Phi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ le morphisme de germes d'espaces analytiques induit par φ . On voit ici que la dimension complexe du germe $(\text{Im}(\Phi), 0)$ est égale à 2, mais que le plus petit germe d'espace formel (i.e. défini comme lieu des zéros de séries formelles) ou analytique (i.e. défini comme lieu des zéro de séries convergentes) contenant ce germe image est le germe $(\mathbb{C}^3, 0)$ qui est de dimension 3 sur \mathbb{C} . L'image de Φ est donc loin d'être analytique. en particulier le morphisme Φ n'est pas propre (par un théorème de Remmert qui assure le caractère analytique de l'image d'un germe d'espace analytique complexe par un morphisme propre [Re]).

3.2. Exemple de Gabrielov [Ga]. — Son exemple est construit à partir de celui de Osgood. On peut remarquer que " $\varphi(x_3 - x_2 e^{\frac{x_2}{x_1}}) = 0$ ". Cependant $x_3 - x_2 e^{\frac{x_2}{x_1}}$ n'est pas un élément de $\mathbb{C}\{x_1, x_2, x_3\}$, mais on peut l'approcher par des polynômes homogènes :

Notons

$$f_n := \left(x_3 - x_2 \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \frac{x_2^i}{x_1^i} \right) x_1^n \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\varphi(f_n) = y_1^{n+1} y_2 \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{y_2^i}{i!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On voit alors que $(n+1)! \varphi(f_n)$ est une série convergente dont tous les coefficients sont de norme plus petite que 1. De plus si le coefficient de $y_1^k y_2^l$ dans le développement de $\varphi(f_n)$ est non nul alors $k = n+1$. Donc $h := \sum_n (n+1)! \varphi(f_n)$ est une série convergente puisque tous ces coefficients sont de norme plus petite que 1 (chaque monôme non nul de h provient d'un seul $\varphi(f_n)$). Or $\widehat{\varphi}$ étant injective, l'unique antécédant que h par $\widehat{\varphi}$ est nécessairement $\widehat{g} := \sum_n (n+1)! f_n$.

Or

$$\sum_n (n+1)! f_n = \left(\sum_n (n+1)! x_1^n \right) x_3 + g(x_1, x_2)$$

et $\sum_n (n+1)! x_1^n$ est une série divergente, donc $\widehat{g} \in \mathbb{C}[[x]] \setminus \mathbb{C}\{x\}$, et $\widehat{\varphi}(\widehat{g}) = h \in \mathbb{C}\{y\}$.

On voit donc que $\varphi(\mathbb{k}\{x\}) \subsetneq \widehat{\varphi}(\mathbb{k}[[x]]) \cap \mathbb{k}\{y\}$.

Considérons maintenant le morphisme $\psi : \mathbb{C}\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \longrightarrow \mathbb{C}\{y_1, y_2\}$ défini par

$$\psi(x_1) = y_1, \quad \psi(x_2) = y_1 y_2, \quad \psi(x_3) = y_1 y_2 e^{y_2}, \quad \psi(x_4) = h(y_1, y_2).$$

Alors $x_4 - \widehat{g}(x_1, x_2, x_3) \in \text{Ker}(\widehat{\psi})$. Par ailleurs le morphisme induit par $\widehat{\psi}$ sur le quotient $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_4]] / (x_4 - \widehat{g}(x_1, x_2, x_3))$ est isomorphe à $\widehat{\varphi}$ qui est injectif. Donc on a l'égalité $\text{Ker}(\widehat{\psi}) = (x_4 - \widehat{g}(x_1, x_2, x_3))$.

Comme $\text{Ker}(\psi)$ est un idéal premier de $\mathbb{C}\{x\}$, $\text{Ker}(\psi)\mathbb{C}[[x]]$ est un idéal premier de $\mathbb{C}[[x]]$ (cf. théorème 4.5 [To1]) inclus dans $\text{Ker}(\widehat{\psi})$. Supposons que $\text{Ker}(\psi) \neq (0)$, alors $\text{Ker}(\psi)\mathbb{C}[[x]] = \text{Ker}(\widehat{\psi})$ car $\text{ht}(\text{Ker}(\widehat{\psi})) = 1$. Donc $\text{Ker}(\widehat{\psi})$ est engendré par une série convergente, notée $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_4\}$. Comme $\text{Ker}(\widehat{\psi}) = (x_4 - \widehat{g}(x_1, x_2, x_3))$, il existe $u(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, $u(0) \neq 0$, tel que $f = u \cdot (x_4 - \widehat{H}(x_1, x_2, x_3))$. Or, en appliquant le théorème de préparation de Weierstrass analytique à f par rapport à x_4 et en utilisant l'unicité dans le théorème de préparation de Weierstrass formel, on voit que $u(x)$ et $x_4 - \widehat{g}(x_1, x_2, x_3)$ doivent être convergents ce qui est impossible car \widehat{g} est une série convergente. Donc $\text{Ker}(\psi) = (0)$ alors que $\text{Ker}(\widehat{\psi}) \neq (0)$.

Notons $\Psi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^4, 0)$ le morphisme de germes d'espaces analytiques induit par ψ . On voit ici que la dimension complexe du germe $(\text{Im}(\Psi), 0)$ est encore égale à 2, le plus petit germe d'espace formel contenant le germe image est de dimension 3 sur \mathbb{C} et le plus petit germe d'espace analytique contenant le germe image est $(\mathbb{C}^4, 0)$ qui est de dimension 4 sur \mathbb{C} .

On voit donc que cet exemple répond par la négative aux deux questions posées à la fin de la partie 1.2. Il y a néanmoins un cas important, que nous verrons dans la partie suivante, où la réponse est positive.

On voit aussi que l'équation (E1) associée à ψ , dans la partie 2, n'a pas la propriété d'approximation cylindrique. Ceci répond aussi par la négative à la question de M. Artin [Ar1] qui était de savoir si toute équation comme en 2 admettait la propriété d'approximation cylindrique (voir aussi [Be1]).

3.3. Exemple de fonction de Chevalley à croissance donnée [Ro1]. —

Là encore cet exemple est inspiré par l'exemple de Osgood et une remarque de Abhyankar [Ab]. Soient $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction croissante et \mathbb{k} un corps. Soit $(n_i)_i$ une suite d'entiers telle que $n_{i+1} > \alpha(n_i + 1)$ pour tout i et telle que la série convergente $\xi(Y) := \sum_{i \geq 1} Y^{n_i}$ soit transcendante sur $\mathbb{k}(Y)$ (cf. [ML-S] pour l'existence d'une telle série). On définit alors le morphisme

$\varphi : \mathbb{k}\{x_1, x_2, x_3\} \longrightarrow \mathbb{k}\{y_1, y_2\}$ de la manière suivante :

$$(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3)) = (y_1, y_1 y_2, y_1 \xi(y_2)).$$

On montre, de la même manière que l'exemple de Osgood, que $\widehat{\varphi}$ est injective. En effet, soit $f \in \text{Ker}(\widehat{\varphi})$. On peut écrire $f = \sum_d f_d$, où f_d est homogène de degré d . Alors $\widehat{\varphi}(f) = \sum y_1^d f_d(1, y_2, \xi(y_2)) = 0$. Donc $f_d(1, y_2, \xi(y_2)) = 0$ pour tout d . Comme $1, y_2, \xi(y_2)$ sont algébriquement indépendants sur \mathbb{k} , ceci implique $f_d = 0$ pour tout d et donc $f = 0$.

Pour tout entier i on peut définir :

$$\bar{f}_i := x_1^{n_i-1} x_3 - \left(x_2^{n_1} x_1^{n_i-n_1} + \dots + x_2^{n_{i-1}} x_1^{n_i-n_{i-1}} + x_2^{n_i} \right).$$

On a alors :

$$\varphi(\bar{f}_i) = y_1^{n_i} \xi(y_2) - y_1^{n_i} \sum_{k=1}^i y_2^{n_k} \in (y)^{n_i+n_{i+1}} \subset (y)^{\alpha(n_i+1)}$$

mais $\bar{f}_i \notin (x)^{n_i+1}$ pour tout i . Donc la fonction de Chevalley β de φ vérifie $\beta(n_i+1) > \alpha(n_i+1)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. On obtient donc $\limsup \frac{\beta(n)}{\alpha(n)} \geq 1$.

Donc, pour toute fonction croissante α , il existe un morphisme d'algèbres analytiques dont la fonction de Chevalley croît plus vite. En particulier, il existe de tels morphismes dont la fonction de Chevalley n'est même pas constructible, puisqu'il existe des fonctions dont la croissance est plus grande que toute fonction constructible. Là encore, cet exemple montre que la question posée à la fin de la partie 1.3 n'a pas de réponse générale satisfaisante.

4. Définitions, outils et théorème principal

Il existe néanmoins un cas important où les questions précédentes ont une réponse positive ou satisfaisante. C'est le cas des morphismes *réguliers* au sens de Gabrielov. Avant de définir ces morphismes, nous allons d'abord donner quelques définitions. Ensuite nous allons donner deux exemples particuliers où les réponses aux questions précédentes sont positives avant d'étudier le cas des morphismes réguliers. Pour les preuves des lemmes ci-dessous on pourra se reporter à [Ro1] par exemple.

Définition 4.1. — Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbres analytiques sur \mathbb{k} où $\text{Gr}_{\mathfrak{m}_B} B$ est intègre (ce qui est la cas par exemple si B est régulier). Dans ce cas, ord_B , défini par $\text{ord}_B(f) := \max\{n \in \mathbb{N} / f \in \mathfrak{m}_B^n\}$ est une valuation. Par abus de notation notons encore φ le morphisme induit sur $A/\text{Ker}(\varphi)$, et notons alors $\nu := \text{ord}_B \circ \varphi$ la valuation définie sur le corps des fractions de $A/\text{Ker}(\varphi)$. Notons \mathbb{k}_ν le corps résiduel de ν , i.e. $\mathbb{k}_\nu := A_\nu/\mathfrak{m}_\nu$ où A_ν est l'anneau de valuation de ν et \mathfrak{m}_ν son idéal maximal, et $\text{tr.deg}_{\mathbb{k}} \nu$ le degré de transcendance de $\mathbb{k} \longrightarrow \mathbb{k}_\nu$.

Si $\varphi(\mathfrak{m}_A) = \{0\}$, alors on pose $r_1(\varphi) := 0$; dans le cas contraire on pose $r_1(\varphi) :=$

$\text{tr. deg}_{\mathbb{k}} \nu + 1$.

Par ailleurs on pose

$$r_2(\varphi) := \dim \left(\frac{\widehat{A}}{\text{Ker}(\widehat{\varphi})} \right)$$

$$r_3(\varphi) := \dim \left(\frac{A}{\text{Ker}(\varphi)} \right).$$

Lemme 4.2. — On a toujours $r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi) \leq r_3(\varphi)$.

Démonstration. — La première inégalité provient de l'inégalité d'Abhyankar pour une valuation. La seconde provient du fait que $\text{ht}(\text{Ker}(\varphi)) = \text{ht}(\text{Ker}(\varphi)\widehat{A}) \leq \text{ht}(\text{Ker}(\widehat{\varphi}))$. \square

Définition 4.3. — Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'algèbres analytiques comme précédemment. Nous dirons que φ est régulier au sens de Gabrielov si $r_1(\varphi) = r_3(\varphi)$.

Nous allons voir que ces morphismes répondent de manière positive ou satisfaisante à toutes les questions posées dans l'introduction (cf. théorème 4.10).

Nous avons ensuite les deux lemmes suivants très utiles :

Lemme 4.4. — Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme de \mathbb{k} -algèbres analytiques où B est régulier. Alors $r_1(\varphi) = r_1(\widehat{\varphi})$.

Lemme 4.5. — Soit $\varphi : A \rightarrow B$ et $\sigma : A' \rightarrow A$ des morphismes de \mathbb{k} -algèbres analytiques où B est régulier. Si σ est fini et injectif alors $r_1(\varphi \circ \sigma) = r_1(\varphi)$.

Nous pouvons donner une caractérisation de r_1 : pour $f \in \mathbb{k}[[y_1, \dots, y_m]]$, nous notons $\text{in}(f)$ le terme de plus bas degré dans le développement en série formelle de f . On définit un ordre total $<$ sur \mathbb{N}^m de la manière suivante : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^m$, on a $\alpha < \beta$ dès que $(|\alpha|, \alpha_1, \dots, \alpha_m) < (|\beta|, \beta_1, \dots, \beta_m)$ pour l'ordre lexicographique à gauche, où $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_m$. Cet ordre induit un ordre sur les monômes de $\mathbb{k}[[y_1, \dots, y_m]]$. Si $M = a_{\alpha} y^{\alpha}$ est un monôme, on définit $\text{exp}(M) := \alpha$. Pour tout $f \in \mathbb{k}[[y_1, \dots, y_m]]$, on définit $\text{in}_{<}(f)$ comme étant le monôme de plus bas ordre dans le développement en série formelle de f et $\text{exp}(f) := \text{exp}_{<}(f)$.

Proposition 4.6. — Soit $\varphi : \mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]] \rightarrow \mathbb{k}[[y_1, \dots, y_m]]$ un morphisme de \mathbb{k} -algèbres formelles. Soit C le plus petit cône contenant $\text{exp}(\varphi(f))$ pour tout $f \in \mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]$. Alors $r_1(\varphi) = \dim(C)$.

Proposition 4.7. — Soit $\varphi : \mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]] \rightarrow \mathbb{k}[[y_1, \dots, y_m]]$, $\psi_1 : \mathbb{k}[[y_1, \dots, y_m]] \rightarrow \mathbb{k}[[z_1, \dots, z_r]]$ et $\psi_2 : \mathbb{k}[[z_1, \dots, z_r]] \rightarrow \mathbb{k}[[x_1, \dots, x_n]]$ des morphismes de \mathbb{k} -algèbres formelles. Si $r_1(\psi_1) = m$ (resp. $r_1(\psi_2) = n$) alors $r_1(\psi_1 \circ \varphi) = r_1(\varphi)$ (resp. $r_1(\varphi \circ \psi_2) = r_1(\varphi)$).

Finalement on peut donner une interprétation plus géométrique de r_1 dans le cas où $\text{car}(\mathbb{k}) = 0$: si (A, \mathfrak{m}) est une \mathbb{k} -algèbre locale, on note $\Omega_{\mathbb{k}}^1(A)$ le A -module des différentielles de Kähler, et $\overline{\Omega}_{\mathbb{k}}^1(A) := \frac{\Omega_{\mathbb{k}}^1(A)}{\cap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}_A^i \Omega_{\mathbb{k}}^1(A)}$ le A -module séparé des différentielles de Kähler. Si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme de \mathbb{k} -algèbres locales, alors il existe un unique morphisme $\varphi^1 : \overline{\Omega}_{\mathbb{k}}^1(A) \rightarrow \overline{\Omega}_{\mathbb{k}}^1(B)$ compatible avec les dérivations canoniques $A \rightarrow \overline{\Omega}_{\mathbb{k}}^1(A)$ et $B \rightarrow \overline{\Omega}_{\mathbb{k}}^1(B)$.

Lemme 4.8. — *Supposons que $\text{car}(\mathbb{k}) = 0$. Alors $r_1(\varphi) = \text{rang}_B(B\varphi^1(\overline{\Omega}_{\mathbb{k}}^1(A)))$.*

Démonstration. — À ce stade, il n'est pas très évident que ces deux termes sont égaux. Tout d'abord, si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme d'algèbres analytiques où B est régulier, alors B est isomorphe à \mathcal{O}_m , et il existe un morphisme injectif fini $\mathcal{O}_n \rightarrow A$. D'après le lemme 4.5, il suffit de montrer le résultat pour $\varphi : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_m$. Pour montrer cela, on peut alors utiliser le théorème 4.9 donné un peu plus loin. En effet, avec les notations de ce théorème, σ_1^1 et σ_2^1 sont des applications linéaires de rangs n et m respectivement, et $\overline{\varphi}^1 \circ \sigma_1^1 = \sigma_2^1 \circ \varphi^1$, donc le rang de φ^1 est égal au rang de $\overline{\varphi}^1$. Or il est clair que le rang de $\overline{\varphi}^1$, i.e. $\text{rang}_{\mathcal{O}_m}(\mathcal{O}_m \overline{\varphi}^1(\overline{\Omega}_{\mathbb{k}}^1(\mathcal{O}_n)))$, vaut r .

Par ailleurs il est facile de calculer $r_1(\widehat{\varphi})$: on a

$$\frac{\mathcal{O}_{n\nu}}{m_\nu} = \mathbb{k} \left(\frac{x_r}{x_{r-1}}, \dots, \frac{x_2}{x_1} \right),$$

donc le rang de $r_1(\widehat{\varphi}^1) = r$. D'autre part, il n'est pas très difficile de voir que σ_1 et σ_2 ne changent pas r_1 en utilisant le corollaire 4.7, et donc que $r_1(\varphi) = r_1(\widehat{\varphi})$ (cf. [Ro4]). On en déduit le résultat. □

En particulier, si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , notons $\Phi : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ le morphisme d'espaces analytiques induit par φ . Alors $r_1(\varphi)$ est le rang jacobien générique de Φ et est égal à la dimension sur \mathbb{k} du germe image. De plus, $r_2(\varphi)$ est la dimension du plus petit germe d'espace formel défini sur \mathbb{k} et $r_3(\varphi)$ est la dimension du plus petit germe d'espace analytique défini sur \mathbb{k} .

Maintenant nous donnons l'énoncé d'un résultat très utile de monomialisation d'un morphisme entre anneaux de séries convergentes (resp. formelles, resp. algébriques). Celui-ci a été montré en caractéristique nulle dans [E-H] puis en caractéristique positive dans [Ro1].

Théorème 4.9. — [E-H][Ro1] *Soit $\varphi : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_m$ un morphisme de \mathbb{k} -algèbres analytiques. Alors il existe $\sigma_1 : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$, $\sigma_2 : \mathcal{O}_m \rightarrow \mathcal{O}_m$ et $\overline{\varphi} : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_m$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- i) *Le morphisme σ_1 est la composition de \mathbb{k} -automorphismes de \mathcal{O}_n , de morphismes χ_d ($d \in \mathbb{N}^*$ est un nombre premier) définis par $\chi_d(x_1) = x_1^d$, and $\chi_d(x_i) = x_i \forall i \neq 1$, et du morphisme q défini par $q(x_1) = x_1 x_2$ et $q(x_i) = x_i$ pour $i \neq 1$.*
- ii) *Le morphisme σ_2 est la composition de \mathbb{k} -automorphismes de \mathcal{O}_m et du morphisme q défini par $q(y_1) = y_1 y_2$ et $q(y_i) = y_i$ pour $i \neq 1$.*

iii) Le morphisme $\bar{\varphi}$ vérifie

$$\bar{\varphi}(x_i) = y_i^{p^{\alpha_i}} v_i \text{ où les } v_i \text{ sont inversibles et } \alpha_i \in \mathbb{N}, \text{ pour } i \leq r, \text{ si } \text{car}(\mathbb{k}) = p > 0$$

$$\text{ou } \bar{\varphi}(x_i) = y_i \text{ pour } i \leq r, \text{ si } \text{car}(\mathbb{k}) = 0$$

$$\text{et } \bar{\varphi}(x_{r+1}) = 0.$$

De plus $r = r_1(\varphi)$.

iv) Le diagramme suivant est commutatif :

$$(\star) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_m \\ \downarrow \sigma_1 & & \downarrow \sigma_2 \\ \mathcal{O}_n & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \mathcal{O}_m \end{array}$$

Ce théorème reste vrai si on remplace respectivement \mathcal{O}_n et \mathcal{O}_m par \mathcal{F}_n et \mathcal{F}_m ou par \mathcal{N}_n et \mathcal{N}_m (voir partie 5.1 pour les définitions de ces deux derniers anneaux).

Finalement voici le théorème qui résume toutes les propriétés des morphismes réguliers :

Théorème 4.10. — Soit \mathbb{k} un corps valué et $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d’algèbres analytiques où B est régulier. Considérons les propriétés suivantes :

- (i) $r_1(\varphi) = r_2(\varphi)$.
- (ii) $r_1(\varphi) = r_2(\varphi) = r_3(\varphi)$.
- (iii) $\exists a \geq 1, b \geq 0$ tels que $\widehat{\varphi}^{-1}(\mathfrak{m}_B^{an+b}) \subset \text{Ker}(\widehat{\varphi}) + \mathfrak{m}_A^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- (iv) $\widehat{\varphi}(\widehat{A}) \cap B = \varphi(A)$.

Alors on a les implications suivantes :

- (i) \iff (ii) \iff (iii) \implies (iv) pour tout corps valué \mathbb{k} .
- (iv) \implies (iii) si \mathbb{k} est un corps valué de caractéristique nulle.

Historiquement, A. Gabrielov a d’abord montré (i) \implies (ii) pour $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} [Ga] (la réciproque étant triviale). C’est cette implication qui est traditionnellement appelée “théorème de Gabrielov” dans ce contexte. Sa preuve étant très compliquée, d’autres auteurs ont essayé de donner une preuve correcte de ce résultat [To3], [Sp1]. Finalement cette implication a été montrée sur un corps de caractéristique quelconque par l’auteur [Ro3]. On peut interpréter cette implication de la manière suivante : si $(X, 0)$ est un germe irréductible d’espace formel dont un morceau est l’image d’un germe d’espace analytique par un germe d’application analytique, alors $(X, 0)$ est en fait un germe d’espace analytique. L’équivalence (ii) \iff (iii) a été d’abord prouvée par S. Izumi pour $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} [Iz2] puis quand \mathbb{k} est un corps de caractéristique nulle [Iz3] puis sur un corps quelconque par l’auteur [Ro1]. L’implication (iii) \implies (iv) est bien connue (voir ci-dessous). L’implication inverse a été montrée par P. Eakin et G. Harris dans le cas où A est régulier [E-H], puis par P. Milman [Mi] pour A quelconque. Nous allons donner dans cet article uniquement un aperçu des démonstrations de (i) \iff (ii) \iff (iii) \implies (iv) (cf. partie 6).

5. Deux “bons” exemples

Nous pouvons donner maintenant deux exemples importants de morphismes réguliers. Le second est un cas particulier du théorème 4.10, mais sa démonstration est beaucoup plus simple, et ce résultat sert ensuite dans la démonstration du théorème 4.10.

5.1. Cas des morphismes algébriques. — Notons $\mathcal{N}_n := \mathbb{k}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ le sous-anneau de \mathcal{F}_n formé des séries formelles qui sont algébriques sur $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. On a clairement $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{O}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appelle \mathbb{k} -algèbre hensélienne toute \mathbb{k} -algèbre isomorphe à un quotient \mathcal{N}_n/I où $n \in \mathbb{N}$ et I est un idéal de \mathcal{N}_n . Si $\varphi : \mathcal{N}_n/I \rightarrow \mathcal{N}_m/J$ un morphisme d’algèbres henséliennes, on note $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_n/I\mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_m/J\mathcal{O}_m$ le morphisme d’algèbres analytiques induit. Si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme d’algèbres henséliennes, on définit $r_4(\varphi) := \dim(A/\text{Ker}(\varphi))$. De même on note $r_i(\varphi) := r_i(\tilde{\varphi})$ pour $1 \leq i \leq 3$. On a évidemment $r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi) \leq r_3(\varphi) \leq r_4(\varphi)$.

On peut déjà remarquer que tout polynôme P à coefficients dans \mathcal{N}_{n+m} possède la propriété d’approximation cylindrique (cf. [KPPRM] ou [Sp2]). C’est-à-dire que toute solution $(f_i, g_j) \in \mathcal{F}_n^r \times \mathcal{F}_{n+m}^s$ de l’équation $P(F_i, G_j) = 0$ peut être approchée par des solutions dans $\mathcal{N}_n^r \times \mathcal{N}_{n+m}^s$. En utilisant la proposition 2.2 qui reste valable dans le cadre hensélien, on voit que tout morphisme $\varphi : \mathcal{N}_n \rightarrow \mathcal{N}_m$ vérifie $\tilde{\varphi}(\mathcal{F}_n) \cap \mathcal{N}_m = \varphi(\mathcal{N}_n)$. En fait on peut montrer plus que cela :

Théorème 5.1. — *Soit $\varphi : A \rightarrow \mathcal{N}_m$ un morphisme de \mathbb{k} -algèbres henséliennes. Alors $r_1(\varphi) = r_4(\varphi)$.*

Démonstration. — On peut remplacer φ par le morphisme induit $A/\text{Ker}(\varphi) \rightarrow B$ car ni r_1 ni r_4 ne changent, donc on suppose que φ est injectif. Ensuite il existe un morphisme $\mathcal{N}_n \rightarrow A$ fini et injectif et le morphisme induit $\mathcal{N}_n \rightarrow \mathcal{N}_m$ a les mêmes rangs r_1 et r_2 que φ (cf. lemme 4.5). On peut donc supposer que φ est injective et $A = \mathcal{N}_n$.

On applique ensuite le théorème 4.9 qui reste valable si l’on remplace \mathcal{O}_n et \mathcal{O}_m par \mathcal{N}_n et \mathcal{N}_m . On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_n & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{N}_m \\ \downarrow \sigma_1 & & \downarrow \sigma_2 \\ \mathcal{N}_n & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathcal{N}_m \end{array}$$

On voit que $\sigma_2 \circ \varphi$ est injectif, donc $\tilde{\varphi} \circ \sigma_1$ est injectif. Il suffit alors de montrer que si on a un morphisme $\tilde{\varphi} : \mathcal{N}_n \rightarrow \mathcal{N}_m$ qui n’est pas injectif tel que $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \sigma$, où σ un morphisme de l’un des trois types du théorème 4.9, alors φ n’est pas injectif. Ceci se fait facilement en vérifiant cela pour chacun des trois types en question. □

Remarque 5.2. — *Si $\text{car}(\mathbb{k})=0$ et si B est intègre, l’existence d’une résolution des singularités pour B nous donne l’existence d’un morphisme injectif $B \rightarrow$*

\mathcal{N}_m tel que $r_1 = m = \dim(B)$. On en déduit que le théorème précédent reste vrai si $\text{car}(\mathbb{k}) = 0$ et B est intègre.

Corollaire 5.3. — [To2][Be2][Mi][Ro4] Soit $\varphi : \mathcal{O}_n/I\mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_m/J\mathcal{O}_m$ un morphisme de \mathbb{k} -algèbres analytiques où I est un idéal de \mathcal{N}_n , J un idéal de \mathcal{N}_m et tel que $\varphi(x_i) \in \mathcal{N}_m/J$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Supposons que $\text{car}(\mathbb{k}) = 0$ ou que $J = (0)$. Alors $r_1(\varphi) = r_3(\varphi)$.

Démonstration. — Soit $\pi : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n/I$ la projection canonique. On peut donc remplacer φ par $\varphi \circ \pi : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_m/J\mathcal{O}_m$ que l'on note encore φ . On note $\varphi^h : \mathcal{N}_n \rightarrow \mathcal{N}_m/J$ le morphisme d'algèbres henséliennes associé et l'on voit que $r_1(\varphi^h) = r_4(\varphi^h)$ d'après le théorème précédent. Donc $r_3(\varphi) = r_3(\varphi^h) = r_1(\varphi^h) = r_1(\varphi)$. \square

5.2. Le cas de la dimension 2. —

Théorème 5.4. — [Ab-vdP][Ro1] Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme de \mathbb{k} -algèbres analytiques où A est un domaine d'intégrité de dimension 2 et B est régulier. Alors φ est injective si et seulement si $r_1(\varphi) = 2$.

Idée de la démonstration. — Si $r_1(\varphi) = 2$, alors $r_3(\varphi) = 2$ et φ est injectif. C'est l'implication inverse qui n'est pas triviale.

On peut déjà se ramener au cas où $A = \mathcal{O}_2$ et $B = \mathcal{O}_m$. On applique alors le théorème 4.9 au morphisme φ . On a alors l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_m \\ \downarrow \sigma_1 & & \downarrow \sigma_2 \\ \mathcal{O}_2 & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \mathcal{O}_m \end{array}$$

Si σ_1 est uniquement une composition de \mathbb{k} -automorphismes de \mathcal{O}_2 et de morphismes χ_d ($d \in \mathbb{N}^*$ est un nombre premier) définis par $\chi_d(x_1) = x_1^d$, and $\chi_d(x_i) = x_i \forall i \neq 1$, et si φ est injectif, alors il n'est pas très difficile de voir que $\bar{\varphi}$ est encore injectif et donc $r_1(\bar{\varphi}) = 2$.

L'idée est alors d'analyser la preuve du théorème 4.9 pour voir que, si φ est injective, on peut construire un diagramme commutatif similaire au précédent, où σ_1 est uniquement une composition de \mathbb{k} -automorphismes et de morphismes χ_d , et où $\bar{\varphi}$ est défini par

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(x_1) &= y_1^a y_2^b u \\ \bar{\varphi}(x_2) &= y_1^c y_2^d v \end{aligned}$$

où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est de rang 2 et u et v sont inversibles. Donc $r_1(\bar{\varphi}) = 2$, d'où $r_1(\varphi) = 2$ aussi d'après le corollaire 4.7. \square

Corollaire 5.5. — Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme de \mathbb{k} -algèbres analytiques où A est un domaine d'intégrité de dimension inférieure ou égale à 2 et B est régulier. Alors $r_1(\varphi) = r_2(\varphi) = r_3(\varphi)$.

Démonstration. — Si $\dim(A) = 0$, il n’y a rien à montrer.

Si $\dim(A) = 1$, et si $r_1(\varphi) = 0$, alors $\text{Ker}(\varphi) = \mathfrak{m}_A$ donc $r_3(\varphi) = 0$. Si $r_1(\varphi) = 1$ alors $r_3(\varphi) = 1$.

Si $\dim(A) = 2$ et si $r_1(\varphi) = 0$, ceci signifie que $\text{Ker}(\varphi) = \mathfrak{m}_A$, donc $r_3(\varphi) = 0$. Si $r_3(\varphi) = 2$, alors φ est injective et donc $r_1(\varphi) = 2$ d’après le théorème précédent. Finalement si $r_1(\varphi) = 1$, $r_3(\varphi) = 1$ nécessairement car $r_3(\varphi) = 2$ implique $r_1(\varphi) = 2$. \square

Remarque 5.6. — La remarque 5.2 reste valable ici, et on peut donc supposer que B est simplement intègre si $\text{car}(\mathbb{k}) = 0$.

6. Idées de preuve du théorème 4.10

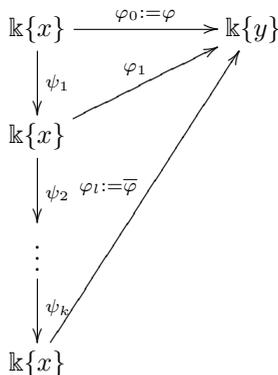
Nous n’allons donner ici que des aperçus des démonstrations en évitant certains détails techniques, sauf la démonstration de $[(i) \iff (ii)] \implies [(ii) \implies (iv)]$ qui est facile.

6.1. Idée de démonstration de $(i) \implies (ii)$. — Soit φ un morphisme comme dans l’énoncé avec $r_1(\varphi) = r_2(\varphi)$. Supposons que $r_2(\varphi) < r_3(\varphi)$. On va montrer que l’on obtient alors une contradiction ce qui prouvera le résultat voulu.

Tout d’abord, par des techniques classiques, on peut construire, à partir de ce morphisme, un nouveau morphisme $\varphi : \mathbb{k}\{x_1, \dots, x_{r+1}\} \longrightarrow \mathbb{k}\{y_1, \dots, y_r\}$ qui est injectif (i.e. $r_3(\varphi) = r + 1$) et tel que $r_1(\varphi) = r_2(\varphi) = r$. D’après le corollaire 5.5, on pourra supposer que $r \geq 2$. Comme $\text{ht}(\text{Ker}(\widehat{\varphi})) = 1$ et que \mathcal{F}_{r+1} est factoriel, l’idéal premier $\text{Ker}(\widehat{\varphi})$ est principal. Puis, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que cet idéal est engendré par un polynôme de Weierstrass en la variable x_{r+1} .

Ensuite on utilise le théorème 4.9 avec les notations de celui-ci. Comme σ_2 et $\widehat{\sigma}_2$ sont injectives, et parce que $r_1(\varphi) = r_1(\sigma_2 \circ \varphi)$ (corollaire 4.7), on voit que l’on peut remplacer φ par $\sigma_2 \circ \varphi$ sans rien changer aux hypothèses sur φ .

On obtient alors le diagramme suivant :



où ψ_i , pour $1 \leq i \leq l$, est un morphisme de l’un des types suivants :

Type A : \mathbb{k} -automorphismes de $\mathbb{k}\{x\}$,

Type B : χ_d (d est un nombre premier) défini par $\chi_d(x_1) = x_1^d$, et $\chi_d(x_i) = x_i$

$\forall i \neq 1,$

Type C : q défini par $q(x_1) = x_1x_2$ et $q(x_i) = x_i$ pour $i \neq 1$.

On s'aperçoit facilement que $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$ est un idéal principal non nul. On peut montrer, en faisant une analyse de la preuve du théorème précédent dans le cas qui nous intéresse, que l'on peut supposer que $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$ est engendré par un polynôme de Weierstrass en la variable x_{r+1} pour tout i .

On montre ensuite par induction que si $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$ est engendré par une série convergente, alors $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_{i-1})$ l'est aussi. Comme $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_1)$ est engendré par x_{r+1} , ceci suffit pour montrer que $\text{Ker}(\widehat{\varphi})$ est engendré par une série convergente et donc que φ n'est pas injective contrairement à l'hypothèse, ce qui est la contradiction cherchée. Pour montrer cette induction, on va étudier séparément les trois types de morphismes ci-dessus.

Pour les morphismes de type A, c'est trivial. Pour les morphismes de type B (i.e. $\psi_i = \chi_d$), il y a deux cas à considérer : soit d est un nombre premier différent de $\text{car}(\mathbb{k})$. Dans ce cas si \widehat{f} est un générateur de $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_{i-1})$, on a $\widehat{\psi}_i(\widehat{f}) = f_1 \dots f_s \in \text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$, où les f_i sont irréductibles. Comme \widehat{f} est irréductible, on voit assez facilement que les f_j sont conjugués sous l'action du groupe des racines d -ièmes de l'unité qui agit par multiplication sur la variable x_1 . Comme $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$ est engendré par une série convergente irréductible (c'est un idéal premier), alors l'un des f_j engendre cet idéal, et donc, pour un certain j_0 , il existe u_{j_0} inversible tel que $u_{j_0}f_{j_0}$ est convergent. Du fait que les f_j sont conjugués sous l'action précédente, on voit que, pour tout j , il existe u_j inversible tel que u_jf_j est convergent. On voit donc qu'il existe u inversible tel que $u\widehat{\psi}_i(\widehat{f})$ est convergent. Il n'est pas très difficile de voir que si l'on appelle v la série inversible dont les monômes non nuls de son développement sont exactement les monômes non nuls de u dont la puissance de x_1 est divisible d , on a encore $v\widehat{\psi}_i(\widehat{f})$ convergent. Dans ce cas $v = \psi_i(w)$ où w est inversible, et $w\widehat{f}$ est une série convergente qui engendre $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$.

Si $d = \text{car}(\mathbb{k}) > 0$, alors notons encore \widehat{f} un générateur de $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_{i-1})$. On a encore $\widehat{\psi}_i(\widehat{f}) = f_1 \dots f_s \in \text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$, où les f_i sont irréductibles. Or $f_1^d \in \text{Im}(\widehat{\psi}_i)$ car $d = \text{car}(\mathbb{k})$. Notons g la pré-image de f_1^d par $\widehat{\psi}_i$. Alors f_1^d divise à la fois $\widehat{\psi}_i(g)$ et $\widehat{\psi}_i(\widehat{f}^d)$. Donc $\widehat{\psi}_i(g)$ et $\widehat{\psi}_i(\widehat{f}^d)$ ne sont pas premiers entre eux, donc g et \widehat{f}^d non plus. Comme \widehat{f} est irréductible, \widehat{f} divise alors g , donc $f_1 \dots f_s$ divise f_1^d . Donc, pour $1 \leq j \leq s$, il existe u_j inversible tel que $f_j = u_jf_1$. Supposons, quitte à permuter les indices comme précédemment, que $(f_1) = \text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$ qui est un idéal engendré par une série convergente. Alors il existe u inversible tel que uf_1 soit convergent. Donc, pour $1 \leq j \leq s$, uu_jf_j est convergent. On conclut alors comme dans le cas $d \neq \text{car}(\mathbb{k})$.

La difficulté provient des morphismes de type C. Là encore, si \widehat{f} est un générateur de $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_{i-1})$, on a $\widehat{\psi}_i(\widehat{f}) \in \text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$, et comme $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$ est engendré par une série convergente irréductible (c'est un idéal premier), alors $\widehat{\psi}_i(\widehat{f})$ a un facteur

irréductible convergent. Il nous faut montrer le résultat suivant qui nous permet de conclure :

Théorème 6.1. — Soit un entier $r \geq 2$. Soit $\psi : \mathbb{k}\{x_1, \dots, x_{r+1}\} \longrightarrow \mathbb{k}\{x_1, \dots, x_{r+1}\}$ défini par $q(x_i) = x_i$ pour tout $i \neq 1$ et $q(x_1) = x_1x_2$. Soit $\hat{f} \in \mathbb{k}[[x_1, \dots, x_r]][x_{r+1}]$ un polynôme de Weierstrass irréductible. Si $\hat{\psi}(\hat{f})$ a un facteur irréductible convergent, alors $\hat{\psi}(\hat{f})$ et \hat{f} sont convergents.

Voici l'idée de la preuve de ce résultat : on peut déjà montrer que $\hat{\psi}(\hat{f})$ est un produit de facteurs irréductibles qui sont des polynômes de Weierstrass en x_{r+1} , et que au moins l'un d'entre eux, noté g , est convergent. Notons $\tilde{x} := (x_1, \dots, x_{r-1})$. Notons alors, pour $1 \leq i \leq i_0$,

$$g_i = x_{r+1}^{d_i} + \sum_{j < d_i} a_{i,j}(\tilde{x})x_{r+1}^j$$

ces différents facteurs : $\hat{\psi}(\hat{f}) = \prod_1^{i_0} g_i$. Or \hat{f} est un polynôme de Weierstrass : $\hat{f} = x_{r+1}^d + \sum_{j < d} a_j(\tilde{x})x_{r+1}^j$. Notons $b_j := \hat{\psi}(a_j)$ pour $1 \leq j \leq d$. On voit que la relation $\hat{\psi}(\hat{f}) = \prod_1^{i_0} g_i$ est équivalente aux relations polynomiales suivantes :

$$\sum_{j_1 + \dots + j_s = k} a_{1,j_1} \dots a_{s,j_s} - b_k = 0, \quad 0 \leq k \leq d - 1.$$

On peut remarquer que $\mathbb{k}[[x]]$ est isomorphe à $\mathbb{k}[[u, v]]/(u_1 - u_2v)$, $u := (u_1, \dots, u_{r+1})$, où l'isomorphisme est défini par

$$u_i \longmapsto x_i \quad \forall i \neq 1, \quad u_1 \longmapsto x_1x_2, \quad v \longmapsto x_1.$$

Remarquons qu'avec cette écriture, $\hat{\psi}(\mathbb{k}[[x]])$ est isomorphe au sous-anneau $\mathbb{k}[[u]] \subset \mathbb{k}[[u, v]]/(u_1 - u_2v)$. Notons A^h son hensélisé, i.e. l'anneau des éléments de $\mathbb{k}[[u, v]]/(u_1 - u_2v)$ algébriques sur $\mathbb{k}[[u]]$ (remarquons que $v \in A^h$). Notons $\tilde{u} := (u_1, \dots, u_r)$ et \tilde{A}^h l'hensélisé de $\mathbb{k}[[\tilde{u}]]$ dans $\mathbb{k}[[\tilde{u}, v]]/(u_1 - u_2v)$. Considérons alors les équations polynomiales en les variables $A_{i,j}$ à coefficients dans \tilde{A}^h :

$$\sum_{j_1 + \dots + j_s = k} A_{1,j_1} \dots A_{s,j_s} - b_k = 0, \quad 0 \leq k \leq d - 1.$$

Ce système a des solutions $a_{i,j}$ dans $\mathbb{k}[[\tilde{u}, v]]/(u_1 - u_2v)$ qui peuvent, d'après le théorème d'approximation de Artin ([Ar2] ou [Sp2]), être approchées aussi près que l'on veut par des solutions dans \tilde{A}^h . On a donc l'existence de $a'_{i,j} \in \tilde{A}^h$ tels que

$$\sum_{j_1 + \dots + j_s = k} a'_{1,j_1} \dots a'_{s,j_s} - b_k = 0, \quad 0 \leq k \leq d - 1.$$

Ceci nous donne $\hat{\psi}(\hat{f}) = \prod_1^{i_0} g'_i$ où les g'_i sont les polynômes de Weierstrass

$$g'_i = x_{r+1}^{d_i} + \sum_{j < d_i} a'_{i,j}(\tilde{x})x_{r+1}^j \in \left(\tilde{A}^h\right)[u_{r+1}] \subset A^h.$$

Comme $\mathbb{k}[[u, v]]/(u_1 - u_2v)$ est un anneau factoriel, la décomposition de $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ en facteurs irréductibles est unique, donc on peut supposer que $g_i = g'_i$ pour tout i . Donc g , le facteur irréductible convergent de $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ vérifie

$$g \in \frac{\mathbb{k}\{u, v\}}{(u_1 - u_2v)} \cap A^h.$$

Notons C^h l'hensélisé de $\mathbb{k}\{u\}$ dans $\mathbb{k}[[u, v]]/(u_1 - u_2v)$. On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 6.2. —

$$\frac{\mathbb{k}\{u, v\}}{(u_1 - u_2v)} \cap A^h \subset C^h.$$

Fixons alors $Q(T) := c_0T^r + c_1T^{r-1} + \dots + c_r \in (\mathbb{k}\{u\})[T]$ est un polynôme irréductible tel que $Q(g) = 0$. Notons respectivement \mathbb{K} et \mathbb{K}_{A^h} les corps de fractions de $\mathbb{k}[[u]]$ et de A^h . On a $g \in A^h$ et $Q(T) \in \mathbb{k}[[u]][T]$. Soit \mathbb{L} une extension normale de \mathbb{K} engendrée par \mathbb{K}_{A^h} . Par propriété de l'hensélisé, $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ est une extension galoisienne, de groupe de Galois noté G . L'idée est alors de voir que les autres racines de Q sont les conjugués de g sous l'action de G . Leur produit est égal à $(-1)^r c_r/c_0$. Comme $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ est irréductible dans $\mathbb{k}[[u]]$ (i.e. \widehat{f} est irréductible dans $\mathbb{k}[[x]]$) et que g divise $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ dans $\mathbb{k}[[u, v]]/(u_1 - u_2v)$, alors $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ divise h dans A^h , donc $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ divise c_r qui est convergent. On en déduit alors facilement, du théorème de préparation, que $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ est convergent, et donc que \widehat{f} est convergent.

Pour prouver le lemme précédent, on procède comme suit : Soit $P(T) := \bar{c}_0T^r + \bar{c}_1T^{r-1} + \dots + \bar{c}_r \in \mathbb{k}[[u]][T]$ un polynôme irréductible ayant g comme racine. On a alors

$$\tilde{f} := \bar{c}_0g^r + \bar{c}_1g^{r-1} + \dots + \bar{c}_r = \bar{h}(u_1 - u_2v)$$

dans $\mathbb{k}[[u, v]]$ pour un certain \bar{h} . Soit M le sous- $\mathbb{k}\{u\}$ -module de $\mathbb{k}[[u, v]]$ engendré par les g^i pour $0 \leq i \leq r$. M est un module fini, donc \widehat{M} , sa complétion pour la topologie (u) -adique, est isomorphe à $M \otimes_{\mathbb{k}\{u\}} \mathbb{k}[[u]]$. Notons J l'idéal de $\mathbb{k}[[u, v]]$ engendré par $u_1 - u_2v$. On a $\tilde{f} \in \widehat{M} \cap J$. Or J est plat sur $\mathbb{k}[[u, v]]$ (c'est un idéal principal donc un module libre) et donc J est plat sur $\mathbb{k}[[u]]$ ($\mathbb{k}[[u, v]]$ est plat sur $\mathbb{k}[[u]]$), donc $\widehat{M} \cap J \subset (M \otimes_{\mathbb{k}\{u\}} \mathbb{k}[[u]]) \cap (J \otimes_{\mathbb{k}\{u\}} \mathbb{k}[[u]])$. Donc $\tilde{f} \in (M \otimes_{\mathbb{k}\{u\}} \mathbb{k}[[u]]) \cap (J \otimes_{\mathbb{k}\{u\}} \mathbb{k}[[u]]) = (M \cap J) \otimes_{\mathbb{k}\{u\}} \mathbb{k}[[u]]$. On peut donc approcher \tilde{f} par des éléments de $M \cap J$. Il existe donc une relation non triviale

$$c_0(u)g(u, v)^r + c_1(u)g(u, v)^{r-1} + \dots + c_r(u) = (u_1 - u_2v)h'$$

où les $c_i \in \mathbb{k}\{u\}$. En regardant cette relation modulo $(u_1 - u_2v)$, on voit que $g \in C^h$.

6.2. Idée de démonstration de (ii) \iff (iii). — Il suffit de montrer que $\widehat{\varphi}$ vérifie la propriété (iii) du théorème 4.10 si et seulement si $r_1(\widehat{\varphi}) = \dim(\widehat{A}/\text{Ker}(\widehat{\varphi}))$ (car (i) \implies (ii)). On peut donc supposer maintenant que A et B sont des \mathbb{k} -algèbres formelles. De plus on peut remplacer A par $A/\text{Ker}(\varphi)$ et supposer alors que φ est injectif.

Ensuite il existe un morphisme $\sigma : \mathcal{F}_n \longrightarrow A$ injectif et fini. On a alors le lemme suivant :

Lemme 6.3. — [Iz2][Ro1] *Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ et $\sigma : A' \longrightarrow A$ deux morphismes de \mathbb{k} -algèbres formelles où σ est fini et injectif. Alors φ vérifie la propriété (iii) du théorème 4.10 si et seulement si $\varphi \circ \sigma$ la vérifie.*

(Pour montrer la condition nécessaire dans ce lemme, on utilise le lemme d’Artin-Rees et la finitude de σ ([Ro1] lemme 5.2). Pour montrer la condition suffisante, on utilise une généralisation par D. Rees [Re] d’un théorème d’Izumi [Iz1].)

On peut donc supposer que $A = \mathcal{F}_n$ et $B = \mathcal{F}_m$.

On utilise alors le théorème 4.9 pour construire le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_n & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F}_m \\ \downarrow \sigma_1 & & \downarrow \sigma_2 \\ \mathcal{F}_n & \xrightarrow{\widehat{\varphi}} & \mathcal{F}_m \end{array}$$

où les notations sont celles du théorème 4.9. Il est facile de voir que σ_1 et σ_2 vérifient la propriété (iii) du théorème 4.10. Si $r_1(\varphi) = n$, alors $\widehat{\varphi}$ est injectif et vérifie la propriété (iii) du théorème 4.10. Donc $\widehat{\varphi} \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \varphi$ est injectif et vérifie la propriété (iii) du théorème 4.10. Donc φ la vérifie aussi. On a donc montré (ii) \implies (iii).

Supposons que φ vérifie la propriété (iii) du théorème 4.10. Pour l’implication inverse, là encore on suppose que A et B sont des \mathbb{k} -algèbres formelles et que φ est injectif. On peut utiliser le théorème 4.9 pour construire le diagramme commutatif précédent. Il est clair que $\sigma_2 \circ \varphi$ vérifie encore la propriété (iii) du théorème 4.10. Notons $r := r_1(\varphi)$ et $\pi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_r$. Alors clairement π vérifie la propriété (iii) du théorème 4.10, et $\pi \circ \widehat{\varphi}$ est injectif. Donc $\pi \circ \sigma_2 \circ \varphi$ est injectif et vérifie la propriété (iii) du théorème 4.10. Il est clair que $r_1(\pi \circ \sigma_2 \circ \varphi) = r_1(\varphi)$ d’après la proposition 4.6. On peut donc supposer de plus que $r_1(\varphi) = m \leq n$. Soient a et b tels que $\varphi^{-1}((y)^{an+b}) \subset (x)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut alors définir une application linéaire surjective sur $\mathbb{k} : \varphi(\mathcal{F}_n)/(y)^{an+b} \cap \varphi(\mathcal{F}_n) \longrightarrow \mathcal{F}_n/(x)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $\varphi(\mathcal{F}_n)/(y)^{an+b} \cap \varphi(\mathcal{F}_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_m/(y)^{an+b}$. Donc la dimension du \mathbb{k} -espace vectoriel $\mathcal{F}_n/(x)^n$ est inférieure où égale à celle de $\mathcal{F}_m/(y)^{an+b}$. En comparant ces dimensions quand $n \longrightarrow +\infty$ on voit que $m \geq n$. Donc $r_1(\varphi) = n$.

6.3. Démonstration de $[(i) \iff (ii)] \implies [(ii) \implies (iv)]$. — Soit $\varphi : \mathcal{O}_n/I \longrightarrow \mathcal{O}_m$ tel que $r_1(\varphi) = r_2(\varphi)$ et $\pi : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n/I$ la projection canonique. Il suffit de montrer que $\widehat{\varphi} \circ \widehat{\pi}(\mathcal{F}_n) \cap \mathcal{O}_m = \varphi \circ \pi(\mathcal{O}_n)$. On peut donc supposer que $\varphi : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_m$ car $r_1(\varphi \circ \pi) = r_1(\varphi)$ par définition. Soient $f \in \widehat{\varphi}(\mathcal{F}_n) \cap \mathcal{O}_m$ et $g \in \mathcal{F}_n$ tel que $\widehat{\varphi}(g) = f$. Quitte à remplacer g par x_1g , on peut supposer que $g \in (x)$ car $x_1g \in \mathcal{O}_n$ implique que $g \in \mathcal{O}_n$. Soit $\psi : \mathcal{O}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_m$ défini par $\psi|_{\mathcal{O}_n} = \varphi$ et $\psi(x_{n+1}) = f$. Alors $\text{Ker}(\widehat{\varphi}) + (x_{n+1} - g) \subset \text{Ker}(\widehat{\psi})$. Donc $r_2(\psi) \leq r_2(\varphi)$. D'un autre coté, $r_1(\psi) = r_1(\varphi)$ par définition de r_1 . Donc $r_1(\psi) = r_2(\psi)$, d'où $r_2(\psi) = r_3(\psi)$ i.e. $\text{Ker}(\widehat{\psi}) = \overline{\text{Ker}(\psi)}$. Comme $x_{n+1} - g \in \text{Ker}(\widehat{\psi})$, il existe $\varepsilon \in (x)^2$ tel que $x_{n+1} - g + \varepsilon \in \text{Ker}(\psi)$. Le théorème de préparation de Weierstrass nous dit alors qu'il existe u inversible tel que $u(x_{n+1} - g + \varepsilon) = x_{n+1} - g'$ avec $g' \in \mathcal{O}_n$. En particulier $x_{n+1} - g' \in \text{Ker}(\psi)$, donc $\varphi(g') = f$ ce qui montre que $f \in \varphi(\mathcal{O}_n)$.

7. Changement de corps de base

La définition de \mathbb{k} -algèbre analytique impose qu'une telle \mathbb{k} -algèbre A vérifie $A/\mathfrak{m}_A = \mathbb{k}$, ce qui peut être restrictif lorsque l'on veut faire un changement de corps de base. On aimerait alors s'autoriser les changements de corps de base dans la définition de \mathbb{k} -algèbre analytique. Néanmoins certains problèmes apparaissent. Par exemple, si $A \longrightarrow B$ est un morphisme injectif de \mathbb{k} -algèbres formelles et $\mathbb{k} \longrightarrow \mathbb{k}'$ une extension finie de corps, alors $\mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} A \longrightarrow \mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} B$ est encore un morphisme injectif de \mathbb{k}' -algèbres formelles. Cependant ce résultat simple devient faux dans le cadre analytique. On a en effet le résultat suivant :

Théorème 7.1. — [Be3] *Il existe un morphisme injectif*

$$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}\{x_1, \dots, x_5\} \longrightarrow \mathbb{Q}\{y_1, y_2\}$$

de \mathbb{Q} -algèbres analytiques tel que le morphisme de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ -algèbres analytiques induit $\chi_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]} : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{x_1, \dots, x_5\} \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{y_1, y_2\}$ ne soit pas injectif.

En particulier, l'anneau local $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{x_1, \dots, x_5\}$ n'est pas une extension finie de $\mathbb{Q}\{x_1, \dots, x_5\}$. Donc, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\{x_1, \dots, x_5\}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{x_1, \dots, x_5\}$.

Démonstration. — Soit $\psi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}\{x_1, \dots, x_4\} \longrightarrow \mathbb{Q}\{y_1, y_2\}$ défini comme le morphisme ψ de l'exemple de Gabrielov. Alors $\text{Ker}(\psi_{\mathbb{Q}}) = (x_4 - \bar{g}(x_1, \dots, x_3))$ car les coefficients de \bar{g} sont rationnels mais $\widehat{\psi}_{\mathbb{Q}}$ est injectif. Notons $\widehat{f} := x_4 - \bar{g}(x_1, \dots, x_3)$. Soit $f \in \mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_4]]$ un polynôme de Weierstrass en x_4 tel que $g := \sqrt{2}\widehat{f} - f$ a tous ses coefficients de valeur absolue inférieure à 1 et tel que \widehat{f} ne divise pas f . En particulier $g \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{x_1, \dots, x_4\}$ mais $g \notin \mathbb{Q}\{x_1, \dots, x_4\}$. Donc

$$G(y_1, y_2) := \psi_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]}(g) = -\widehat{\psi}_{\mathbb{Q}}(f) \in \mathbb{Q}[[y_1, y_2]] \cap \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{y_1, y_2\} = \mathbb{Q}\{y_1, y_2\}.$$

Notons $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}\{x_1, \dots, x_5\} \longrightarrow \mathbb{Q}\{y_1, y_2\}$ l'extension de $\psi_{\mathbb{Q}}$ définie par $\chi_{\mathbb{Q}}(x_5) := G(y_1, y_2)$. Alors $x_5 - g \in \text{Ker}(\chi_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]})$ où $\chi_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]} : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{x_1, \dots, x_5\} \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{y_1, y_2\}$ est le morphisme de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ -algèbres analytiques induit par $\chi_{\mathbb{Q}}$.

Nous allons montrer que $\chi_{\mathbb{Q}}$ est injectif :
 En effet soit $\sigma \in \text{Ker}(\chi_{\mathbb{Q}})$ irréductible. Alors

$$\sigma(x) = u(x)(x_5 - g(x_1, \dots, x_4)) + \tau(x_1, \dots, x_4)$$

en utilisant le théorème de division de Weierstrass dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{x_1, \dots, x_5\}$. En particulier $\tau \in \text{Ker}(\psi_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]}) \subset \text{Ker}(\psi)$. Or ψ est injectif d'après l'exemple de Gabrielov, donc $\tau = 0$. On peut écrire $\sigma = \sum_{k \geq 0} \sigma_k(x_1, \dots, x_4)x_5^k$ et $u = \sum_{k \geq 0} u_k(x_1, \dots, x_4)x_5^k$ avec $\sigma_0 \neq 0$, car σ est irréductible et $x_5 \notin \text{Ker}(\chi_{\mathbb{Q}})$ (\widehat{f} ne divisant pas f). On en déduit $\sigma_0 = u_0g$. Notons $u_0 = h_1 + \sqrt{2}h_2$ où $h_1, h_2 \in \mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_4]]$. On en déduit $-\sigma_0 = (h_1 + \sqrt{2}h_2)(\sqrt{2}\widehat{f} - f)$. D'où $h_1 + \sqrt{2}h_2 = \frac{\sigma_0(\sqrt{2}\widehat{f}+f)}{f^2-2\widehat{f}^2}$. Donc

$$h_1 = \frac{\sigma_0 f}{f^2 - 2\widehat{f}^2} \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{\sigma_0 \widehat{f}}{f^2 - 2\widehat{f}^2}.$$

L'anneau $\mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_4]]$ est factoriel, et comme \widehat{f} est irréductible et que \widehat{f} ne divise pas f , on en déduit que $f^2 - 2\widehat{f}^2$ divise σ_0 . Notons μ le quotient de σ_0 par $f^2 - 2\widehat{f}^2$. On voit alors que $u_0 = \mu(f + \sqrt{2}\widehat{f})$. Or $f + \sqrt{2}\widehat{f}$ est un polynôme de Weierstrass qui est une série divergente (car $f - \sqrt{2}\widehat{f}$ est convergent et \widehat{f} est divergent). De la remarque 1.5, on déduit que u_0 est divergent ce qui est contradictoire. Donc $\chi_{\mathbb{Q}}$ est injectif.

Si $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{x_1, \dots, x_5\}$ était une extension finie de $\mathbb{Q}\{x_1, \dots, x_5\}$, alors $h := x_5 - g$ vérifierait une relation de la forme $h^r + a_{r-1}h^{r-1} + \dots + a_0 = 0$ où $a_i \in \mathbb{Q}\{x_1, \dots, x_5\}$, pour $0 \leq i \leq r - 1$, et $a_0 \neq 0$. On aurait alors $\chi_{\mathbb{Q}}(a_0) = 0$, ce qui contredit le fait que $\text{Ker}(\chi_{\mathbb{Q}}) = (0)$. □

On peut néanmoins remarquer que dans un cas important (changement de base de \mathbb{R} à \mathbb{C} par exemple) ce genre de problème n'apparaît pas :

Théorème 7.2. — [Be3] Soit \mathbb{k} un corps valué complet et \mathbb{k}' une extension finie de \mathbb{k} . Si φ est un morphisme injectif, $\varphi : \mathbb{k}\{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{k}\{y_1, \dots, y_m\}$, alors l'extension de φ sur \mathbb{k}' est encore injective.

On peut néanmoins étendre la notion de \mathbb{k} -algèbre analytique de la manière suivante :

Définition 7.3. — Une \mathbb{k} -algèbre analytique est un anneau local A tel qu'il existe un morphisme d'anneaux locaux $\mathbb{k}\{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow A$ injectif et fini. En particulier le corps résiduel de A est une extension finie de \mathbb{k} .

Nous n'allons pas rentrer dans les détails, mais tous les résultats précédents restent vrais avec cette nouvelle définition. La seule chose qui n'est pas vraie en général est que $\mathbb{k}'\{x_1, \dots, x_n\}$ est une \mathbb{k} -algèbre analytique quand $\mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}'$ est une extension finie de corps valués. Il faut remarquer ([Ab-vdP]) qu'une \mathbb{k} -algèbre analytique qui est un anneau régulier est isomorphe à $\mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}\{x_1, \dots, x_n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$ où $\mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}'$ est finie. En particulier le théorème 4.9 reste vrai si l'on

remplace \mathcal{O}_n et \mathcal{O}_m par $\mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}\{x_1, \dots, x_n\}$ et $\mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}\{y_1, \dots, y_m\}$.
On peut déduire les deux résultats suivants :

Théorème 7.4. — Soient $\varphi : \mathbb{k}\{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow \mathbb{k}\{y_1, \dots, y_m\}$ un morphisme d'algèbres analytiques injectif et $\mathbb{k} \longrightarrow \mathbb{k}'$ une extension finie de corps valués.

- (i) Si $r_1(\varphi) = r_2(\varphi)$, alors le morphisme induit $\varphi_{\mathbb{k}'} : \mathbb{k}'\{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow \mathbb{k}'\{y_1, \dots, y_m\}$ est injectif.
- (ii) Si $n \leq 2$, alors le morphisme induit $\varphi_{\mathbb{k}'} : \mathbb{k}'\{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow \mathbb{k}'\{y_1, \dots, y_m\}$ est injectif.

Démonstration. — Ce résultat vient du fait que $r_1(\varphi_{\mathbb{k}'}) = r_1(\varphi_{\mathbb{k}})$ si $\mathbb{k} \longrightarrow \mathbb{k}'$ est fini, et du théorème 4.10 et du corollaire 5.5. \square

Références

- [Ab] S. S. Abhyankar, *Two notes on formal power series*, Proc. Amer. Math. Soc., **7**, (1956), 905–907.
- [Ab-vdP] S. S. Abhyankar, M. van der Put, *Homomorphisms of analytic local rings*, J. Reine Angew. Math., **242**, (1970), 26–60.
- [Ar1] M. Artin, *On the solutions of analytic equations*, Invent. Math., **5**, (1968), 177–291.
- [Ar2] M. Artin, *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, Publ. Math. IHES, **36**, (1969), 23–58.
- [Be1] J. Becker, *A counterexample to Artin approximation with respect to subrings*, Math. Ann., **230**, (1977), no. 2, 195–196.
- [Be2] J. Becker, *Exposé on a conjecture of Tougeron*, Annales de l'Institut Fourier, **27**, no. 4, (1977), 9–27.
- [Be3] J. Becker, *On the nonflatness of analytic tensor product*, Math. Ann., **243**, (1979), 1–10.
- [Ch] C. Chevalley, *On the theory of local rings*, Ann. of Math. (2), **44**, (1943), 690–708.
- [E-H] P. M. Eakin, G. A. Harris, *When $\Phi(f)$ convergent implies f convergent*, Math. Ann., **229**, (1977), 201–210.
- [Ga] A. M. Gabriellov, *The formal relations between analytic functions*, Funkcional. Anal. i Prilozhen, **5**, (1971), 64–65.
- [Gr] A. Grothendieck, *Techniques de construction en géométrie analytique VI*, Séminaire Henri Cartan, **13**, no. 1, (1960-61).
- [Ho] C. Houzel, *Géométrie analytique locale I*, Séminaire Henri Cartan, **13**, no. 2, exp. 18, (1960-61).
- [Iz1] S. Izumi, *A measure of integrity for local analytic algebras*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **21**, (1985), 719–736.
- [Iz2] S. Izumi, *Gabriellov's Rank Condition is Equivalent to an Inequality of Reduced Orders*, Math. Ann., **276**, (1986), 81–89.

- [Iz3] S. Izumi, *Note on Linear Chevalley Estimate for Homomorphisms of Local Algebras*, *Comm. Algebra*, **24(12)**, (1996), 3885–3889.
- [KPPRM] H. Kurke, G. Pfister, D. Popescu, M. Roczen, T. Mostowski, *Die Approximationseigenschaft lokaler Ringe*, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 634. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. iv+204 pp.
- [ML-S] S. MacLane, O. F. G. Schilling, *Zero-dimensional branches of rank one on algebraic varieties*, *Ann. of Math.*, **40**, (1939).
- [Mi] P. Milman, *Polynomial and analytic homomorphisms of analytic rings*, *Math. Ann.*, **232**, (1978), 247–253.
- [Os] W. F. Osgood, *On functions of several complex variables*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **17**, (1916), 1–8.
- [Re] R. Remmert, *Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume*, *Math. Ann.*, **133**, (1957), 328–370.
- [Ro1] G. Rond, *Homomorphisms of local algebras in positive characteristic*, arXiv :math.AC/0612214, 2006.
- [Ro2] G. Rond, *Approximation de Artin cylindrique et morphismes d'algèbres analytiques*, submitted.
- [Ro3] G. Rond, *An algebraic proof of Gabrielov's theorem about analytic homomorphisms in any characteristic*, arXiv :0704.2144, 2007.
- [Ro4] G. Rond, *Analytic homomorphisms and transcendence theory*, in preparation.
- [Sp1] M. Spivakovsky, *On convergence of formal functions : a simple algebraic proof of Gabrielov's theorem*, *Publ. Dip. di Mat.*, Università di Pisa, Sezione di Geometria e Algebra, Seminario di Geometria Reale (volume dedicated to Aldo Andreotti), vol.1.41 (560) (1990), 69–77.
- [Sp2] M. Spivakovsky, *A new proof of D. Popescu's theorem on smoothing of ring homomorphisms*, *J. Amer. Math. Soc.*, **12** (1999), no. 2, 381–444.
- [To1] J.-Cl. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 71*, Springer-Verlag, (1972).
- [To2] J.-Cl. Tougeron, *Courbes analytiques sur un germe d'espace analytique et applications*, *Annales de l'Institut Fourier*, **26**, no. 2, (1976), 117–131.
- [To3] J.-Cl. Tougeron, *Sur les racines d'un polynôme à coefficients séries formelles*, *Real analytic and algebraic geometry (Trento 1988)*, 325–363, *Lectures Notes in Math.*, **1420**, (1990).

Initiation to mould calculus through the example of saddle-node singularities

David Sauzin

Tordesillas, June 20th, 2007

Abstract

This article proposes an initiation to Écalle’s mould calculus, a powerful combinatorial tool which yields surprisingly explicit formulas for the normalising series attached to an analytic germ of singular vector field. This is illustrated on the case of saddle-node singularities, generated by two-dimensional vector fields which are formally conjugate to Euler’s vector field $x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (x+y) \frac{\partial}{\partial y}$, and for which the formal normalisation proves to be resurgent in $1/x$.

0 Introduction

This article is a survey of a part of a longer article [Sau08] which aims at presenting in a systematic way some aspects of Écalle’s theory of moulds, with the example of the classification of saddle-node singularities as a red thread.

Mould calculus was developed by J. Écalle in relation with his Resurgence theory almost thirty years ago [Eca81] and the application to the saddle-node problem was indicated in [Eca84] in concise manner.

Here, we omit much of the material of [Sau08] and present the arguments in a different order, trying to explain the formal part of Écalle’s method in fewer pages and hoping to arouse the reader’s interest by this illustration of mould calculus.

1 Saddle-node singularities

Germes of holomorphic singular foliations of $(\mathbb{C}^2, 0)$ are defined by analytic differential equations of the form $P(x, y)dy - Q(x, y)dx = 0$ with P and $Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$ both vanishing at the origin. Classifying such singular foliations means describing the conjugacy classes under the action of the group of germs of analytic invertible transformations of $(\mathbb{C}^2, 0)$; this is equivalent to classifying the corresponding singular vector fields $P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ up to time-change.

We shall examine the case in which the foliation is assumed to be formally conjugate to the standard saddle-node foliation, defined by $x^2 dy - y dx = 0$.

This is the simplest case for differential equations whose 1-jets admit 0 and 1 as eigenvalues (the possible formal normal forms are $x^{p+1}dy - (1 + \lambda x)dx = 0$, with $p \in \mathbb{N}^*$ and $\lambda \in \mathbb{C}$, and $y dx = 0$).

In this case, by a classical theorem of Dulac ([MR82], [Mou93]), the foliation can be analytically reduced to the form $x^2dy - A(x, y)dx = 0$, with

$$A(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}, \quad A(0, y) = y, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0. \quad (1)$$

Moreover, the vector fields corresponding to the foliation and to the normal form,

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + A(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{and} \quad X_0 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2)$$

are themselves formally conjugate: there is a unique formal transformation of the form

$$\theta(x, y) = (x, \varphi(x, y)), \quad \varphi(x, y) = y + \sum_{n \geq 0} \varphi_n(x) y^n, \quad \varphi_n(x) \in x\mathbb{C}[[x]], \quad (3)$$

such that

$$X = \theta_* X_0 \quad (4)$$

(no time-change is needed here). We call it the *formal normalisation* of the foliation (or of X itself).

Thus, in this case, our problem of analytic classification boils down to describing the analytic conjugacy classes of vector fields of the form X under the action of the group of “fibred” transformations (leaving x unchanged), knowing that they are all formally conjugate to one another (since all of them are formally conjugate to X_0).

Our starting point will be the data (1)–(2). We shall study the formal conjugacies (3) by means of Écalle’s “moulds” and see how this leads to the “resurgent” character of the formal series which appear. (A similar study could be performed for the more general normal forms, with any p and λ .) We shall not give here the complete resurgent solution of the problem of analytic classification; the reader is referred to [Sau08] for this and for the comparison with Martinet-Ramis’s solution [MR82].

2 Formal separatrix, formal integral

Observe that our foliations always have an analytic separatrix (a leaf passing through the origin), namely the curve $\{x = 0\}$ in Dulac coordinates. For the vector field X , this corresponds to the solution $z \mapsto (0, ue^z)$ (with an arbitrary constant of integration $u \in \mathbb{C}$).

The “formal curve” $\{y = \varphi_0(x)\}$ is to be considered as a “formal separatrix” of our foliation (and as a formal centre manifold of X), since it is the image by θ of $\{y = 0\}$ which is the other separatrix of the normal form. A

time-parametrisation of the corresponding integral curve of X_0 is $z \mapsto (x, y) = (-1/z, 0)$. The formal series φ_0 can thus be obtained by setting $\tilde{\varphi}_0(z) = \varphi_0(-1/z)$ and looking for a formal solution $z \mapsto (-1/z, \tilde{\varphi}_0(z))$ of X , i.e. the formal series $\tilde{\varphi}_0$ must solve the non-linear differential equation

$$\frac{d\tilde{Y}}{dz} = A(-1/z, \tilde{Y}). \tag{5}$$

More generally, if we set

$$\tilde{Y}(z, u) = u e^z + \sum_{n \geq 0} u^n e^{nz} \tilde{\varphi}_n(z), \quad \tilde{\varphi}_n(z) = \varphi_n(-1/z) \in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]], \tag{6}$$

we get what Écalle calls a “formal integral” of X , a formal object containing a free parameter and solving (5) (this is equivalent to finding a formal transformation of the form (3) which solves (4)). One can find the formal series $\tilde{\varphi}_n$ by solving the ordinary differential equations obtained by expanding (5) in powers of u .

The simple and famous example of Euler’s equation, for which $A(x, y) = x + y$, shows that the above formal series can be divergent. Indeed, the equation for $\varphi_0(x)$ is then $x^2 \frac{d\varphi_0}{dx} = x + \varphi_0$ and one finds $\varphi_0(x) = -\sum_{n \geq 1} (n-1)! x^n$. Since the equation is affine, there are no other non-trivial series in this case: $\varphi(x, y)$ boils down to $y + \varphi_0(x)$.

It is not by studying the differential equation (5) that we shall get information on the formal transformation θ , but rather by directly working on the conjugacy equation (3).

3 The formal normalisation as an operator

Let $\mathcal{A} = \mathbb{C}[[x, y]]$ and let ν denote the standard valuation (thus $\nu(f) \in \mathbb{N}$ is the “order” of f , with the convention that $\nu(x^m y^n) = m + n$). We denote by \mathfrak{M} the maximal ideal of \mathcal{A} , consisting of all formal series without constant term, i.e. $\mathfrak{M} = \{ f \in \mathcal{A} \mid \nu(f) \in \mathbb{N}^* \}$.

We are given analytic vector fields X and X_0 as in (2), which are operators of the \mathbb{C} -algebra \mathcal{A} , more precisely \mathbb{C} -derivations (in fact, they are derivations of $\mathbb{C}\{x, y\}$, but we begin by forgetting analyticity). We shall look for the formal normalisation θ through its “substitution operator”, which is the operator $\Theta \in \text{End}_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ defined by

$$\Theta f = f \circ \theta, \quad f \in \mathcal{A}. \tag{7}$$

There is in fact a one-to-one correspondence between “substituable” pairs of formal series, i.e. pairs $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, and operators of \mathcal{A} which are *formally continuous algebra homomorphisms*, i.e. operators $\Theta \in \text{End}_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ such that $\Theta(fg) = (\Theta f)(\Theta g)$ for any $f, g \in \mathcal{A}$ and $\nu(\Theta f_n) \rightarrow \infty$ for any sequence (f_n) of \mathcal{A} such that $\nu(f_n) \rightarrow \infty$ (the proof is easy, see e.g. [Sau08]; one goes from Θ to θ simply by setting $\theta_1 = \Theta x$ and $\theta_2 = \Theta y$).

Equation (4) can be written

$$(Xf) \circ \theta = X_0(f \circ \theta), \quad f \in \mathcal{A},$$

and thus rephrased in terms of the substitution operator Θ as

$$\Theta X = X_0 \Theta. \tag{8}$$

Thus, looking for a formal invertible transformation solution of the conjugacy equation (4) is equivalent to looking for a formally continuous algebra automorphism solution of (8).

4 The formal normalisation as a mould expansion

The general strategy for finding a normalising operator by mould calculus consists in constructing it from the “building blocks” of the object one wishes to normalise. This implies that we shall restrict our attention to those operators of \mathcal{A} which are obtained by combining the homogeneous components of X in all possible ways...

Since we are interested in fibred transformations, it is relevant to consider the homogeneous components of X relatively to the variable y only and to view $\mathbf{A} = \mathbb{C}[[x]]$ as a ring of scalars; we thus write

$$X = X_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n B_n, \quad B_n = y^{n+1} \frac{\partial}{\partial y}, \tag{9}$$

with coefficients $a_n \in \mathbf{A}$ stemming from the Taylor expansion

$$A(x, y) = y + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(x) y^{n+1}, \quad \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq -1\}. \tag{10}$$

Homogeneity here means that each $a_n B_n$ sends $\mathbf{A}y^k$ in $\mathbf{A}y^{k+n}$ for all $k \in \mathbb{N}$: the component $a_n B_n$ is homogeneous of degree n (this was the reason for shifting the index n by one unit in the Taylor expansion), while X_0 is homogeneous of degree 0.

We shall look for a solution of (8) among all the operators of the form

$$\Theta = \sum_{r \geq 0} \sum_{n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}} \mathcal{V}^{n_1, \dots, n_r} B_{n_r} \cdots B_{n_1}. \tag{11}$$

Here $(\mathcal{V}^{n_1, \dots, n_r})$ is a collection of coefficients in \mathbf{A} , to be chosen in such a way that formula (11) has a meaning as a formally continuous operator of \mathcal{A} and defines an automorphism solving (8). The above summation is better understood as a summation over \mathbf{N}^\bullet , the free monoid consisting of all words ω (of any length r) the letters of which are taken in the alphabet \mathbb{N} . We thus set

$$\mathbf{B}_\omega = B_{n_r} \cdots B_{n_1}, \quad \omega = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbf{N}^\bullet, \tag{12}$$

and $\mathbf{B}_\emptyset = \text{Id}$ for the only word of zero length ($\omega = \emptyset$), and rewrite formula (11) as

$$\Theta = \sum_{\omega \in \mathcal{N}^\bullet} \mathcal{V}^\omega \mathbf{B}_\omega. \tag{13}$$

An operator Θ defined by such a formula is called a mould expansion, or a mould-comould contraction. Here the *comould* is the map

$$\omega \in \mathcal{N}^\bullet \mapsto \mathbf{B}_\omega \in \text{End}_{\mathbb{C}} \mathcal{A},$$

that we decided to define from the homogeneous components of X , and the *mould* is the map

$$\omega \in \mathcal{N}^\bullet \mapsto \mathcal{V}^\omega \in \mathbf{A},$$

that we must find so as to satisfy the aforementioned requirements.

5 The general framework for mould-comould contractions

The general theory of moulds and comoulds requires:

- an alphabet \mathcal{N} , which is simply a non-empty set, often with a structure of commutative semigroup (since it appears in practice as a set of possible degrees of homogeneity);
- a commutative \mathbb{C} -algebra \mathbf{A} (the unit of which we denote by 1), in which moulds take their values;
- an \mathbf{A} -algebra \mathcal{F} (the unit of which we denote by Id), possibly non-commutative, in which comoulds take their values. We also assume that a *complete ring pseudovaluation* $\text{val}: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ is given.¹

In the saddle-node case we can choose for \mathcal{F} a certain \mathbf{A} -subalgebra of $\text{End}_{\mathbf{A}} \mathcal{A}$, with $\mathbf{A} = \mathbb{C}[[x]]$ and $\mathcal{A} = \mathbf{A}[[y]] = \mathbb{C}[[x, y]]$ (the fact that we deal with operators which commute with the multiplication by an element of \mathbf{A} reflects the fibred character over x of the situation), defined as the set $\mathcal{F}_{\mathbf{A}, \nu}$ of operators admitting a valuation with respect to the valuation ν of \mathcal{A} , i.e. the set of all $\Theta \in \text{End}_{\mathbf{A}} \mathcal{A}$ for which there exists $\delta \in \mathbb{Z}$ such that $\nu(\Theta f) \geq \nu(f) + \delta$ for all $f \in \mathcal{A}$. This way, the valuation² ν of \mathcal{A} induces a complete ring pseudovaluation val on $\mathcal{F}_{\mathbf{A}, \nu}$, namely $\text{val}(\Theta) = \inf_{f \in \mathcal{A} \setminus \{0\}} \{\nu(\Theta f) - \nu(f)\}$.

One can thus safely speak of “formally summable” families in \mathcal{F} : for instance, if for any $\delta \in \mathbb{Z}$ the set $\{\omega \in \mathcal{N}^\bullet \mid \text{val}(\mathcal{V}^\omega \mathbf{B}_\omega) \leq \delta\}$ is finite, then the family $(\mathcal{V}^\omega \mathbf{B}_\omega)$ is formally summable and formula (13) defines an element of \mathcal{F} . We repeat our definitions in this general context:

¹This means that $\text{val}(\Theta) = \infty \iff \Theta = 0$, $\text{val}(\Theta_1 - \Theta_2) \geq \min\{\text{val}(\Theta_1), \text{val}(\Theta_2)\}$, $\text{val}(\Theta_1 \Theta_2) \geq \text{val}(\Theta_1) + \text{val}(\Theta_2)$ and the distance $(\Theta_1, \Theta_2) \mapsto 2^{-\text{val}(\Theta_2 - \Theta_1)}$ is complete.

²For technical reasons, rather than the standard valuation on $\mathbb{C}[[x, y]]$, we shall use another monomial valuation, defined by $\nu(x^m y^n) = 4m + n$ (see Section 6).

- a mould is any map $\mathcal{N}^\bullet \rightarrow \mathbf{A}$ (we usually denote by M^\bullet the mould whose value on the word ω is M^ω),
- a comould is any map $\mathcal{N}^\bullet \rightarrow \mathcal{F}$ (we usually denote by \mathbf{B}_\bullet the comould whose value on the word ω is \mathbf{B}_ω),
- a mould expansion is the result of the contraction of a mould M^\bullet and a comould \mathbf{B}_\bullet such that the family $(M^\omega \mathbf{B}_\omega)_{\omega \in \mathcal{N}^\bullet}$ is formally summable in \mathcal{F} ; we usually use the short-hand notation

$$\Theta = \sum M^\bullet \mathbf{B}_\bullet.$$

The monoid law in \mathcal{N}^\bullet is the concatenation, denoted by \cdot , which allows us to define *mould multiplication* by the formula

$$P^\bullet = M^\bullet \times N^\bullet: \omega \mapsto P^\omega = \sum_{\omega = \omega^1 \cdot \omega^2} M^{\omega^1} N^{\omega^2}.$$

The space of moulds is in fact an \mathbf{A} -algebra. Correspondingly, if a comould \mathbf{B}_\bullet is *multiplicative*, in the sense that $\mathbf{B}_{\omega^1 \cdot \omega^2} = \mathbf{B}_{\omega^2} \mathbf{B}_{\omega^1}$ for any $\omega^1, \omega^2 \in \mathcal{N}^\bullet$ (as is obviously the case for a comould defined as in (12)), then

$$\sum (M^\bullet \times N^\bullet) \mathbf{B}_\bullet = \left(\sum N^\bullet \mathbf{B}_\bullet \right) \left(\sum M^\bullet \mathbf{B}_\bullet \right)$$

as soon as both expressions in the right-hand side are formally summable.

One can easily check that a mould M^\bullet has a multiplicative inverse if and only if M^\emptyset is invertible in \mathbf{A} . In this case, if $(M^\omega \mathbf{B}_\omega)$ is formally summable and \mathbf{B}_\bullet is multiplicative, then $\sum M^\bullet \mathbf{B}_\omega$ is invertible in \mathcal{F} .

We do not develop farther the theory here and prefer to return to the formal normalisation of our saddle-node singularity X .

6 Solution of the formal conjugacy problem

Let us use the \mathbf{A} -algebra $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{A}, \nu}$ defined in the previous section, to which each operator $B_n = y^{n+1} \partial_y$ obviously belongs (B_n is \mathbf{A} -linear and $\text{val}(B_n) = n$), and thus also the \mathbf{B}_ω 's defined by (12). Formula (9) can be written $X - X_0 = \sum J_a^\bullet \mathbf{B}_\bullet$, with

$$J_a^\omega = \begin{cases} a_{n_1} & \text{if } \omega = (n_1) \\ 0 & \text{if } r(\omega) \neq 1 \end{cases} \tag{14}$$

and the conjugacy equation (8) is equivalent to

$$\Theta(X - X_0) = [X_0, \Theta]. \tag{15}$$

Lemma 6.1. *Let \mathcal{V}^\bullet be a mould such that the family $(\mathcal{V}^\omega \mathbf{B}_\omega)$ is formally summable in \mathcal{F} . Then*

$$[X_0, \sum \mathcal{V}^\bullet \mathbf{B}_\bullet] = \sum (x^2 \partial_x \mathcal{V}^\bullet + \nabla \mathcal{V}^\bullet) \mathbf{B}_\bullet,$$

where the mould $\nabla\mathcal{V}^\bullet$ is defined by $\nabla\mathcal{V}^0 = 0$ and

$$\nabla\mathcal{V}^\omega = (n_1 + \dots + n_r)\mathcal{V}^\omega$$

for $\omega = (n_1, \dots, n_r)$ non-empty.

Proof. The operator $\mathbf{B}_{n_1, \dots, n_r}$ is homogeneous of degree $n_1 + \dots + n_r$. One can check that, if $\Theta \in \text{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}[[y]])$ is homogeneous of degree $n \in \mathbb{Z}$, then

$$[y\partial_y, \Theta] = n\Theta.$$

Indeed, by \mathbf{A} -linearity and formal continuity, it is sufficient to check that both operators act the same way on a monomial y^k ; but $\Theta y^k = \beta_k y^{k+n}$ with a $\beta_k \in \mathbf{A}$, thus $y\partial_y \Theta y^k = (k+n)\beta_k y^{k+n} = (k+n)\Theta y^k$ while $\Theta y\partial_y y^k = k\Theta y^k$.

Since $X_0 = x^2\partial_x + y\partial_y$ and $x^2\partial_x$ commutes with the B_n 's, it follows that

$$[X_0, \mathcal{V}^\omega \mathbf{B}_\omega] = (x^2\partial_x \mathcal{V}^\omega + (n_1 + \dots + n_r)\mathcal{V}^\omega)\mathbf{B}_\omega, \quad \omega = (n_1, \dots, n_r) \in \mathcal{N}^\bullet.$$

The conclusion follows by formal continuity. □

Looking for a solution of the form $\Theta = \sum \mathcal{V}^\bullet \mathbf{B}_\bullet$ for equation (15), we are thus led to the mould equation

$$x^2\partial_x \mathcal{V}^\bullet + \nabla\mathcal{V}^\bullet = J_a^\bullet \times \mathcal{V}^\bullet. \tag{16}$$

Lemma 6.2. *Equation (16) has a unique solution \mathcal{V}^\bullet such that $\mathcal{V}^0 = 1$ and $\mathcal{V}^\omega \in x\mathbb{C}[[x]]$ for every non-empty $\omega \in \mathcal{N}^\bullet$. Moreover,*

$$\mathcal{V}^{n_1, \dots, n_r} \in x^{\lceil r/2 \rceil} \mathbb{C}[[x]], \tag{17}$$

where $\lceil s \rceil$ denotes, for any $s \in \mathbb{R}$, the least integer not smaller than s .

Proof. Let us perform the change of variable $z = -1/x$ and set $\partial = \frac{d}{dz}$ and $\tilde{a}_n(z) = a_n(-1/z)$. Observe that

$$\tilde{a}_n \in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]], \quad \tilde{a}_0 \in z^{-2}\mathbb{C}[[z^{-1}]], \tag{18}$$

as a consequence of (1).

The equation for $\tilde{\mathcal{V}}^\omega(z) = \mathcal{V}^\omega(-1/z)$, with $\omega = (n_1, \dots, n_r)$, $r \geq 1$, is

$$(\partial + n_1 + \dots + n_r)\tilde{\mathcal{V}}^{n_1, \dots, n_r} = \tilde{a}_{n_1}\tilde{\mathcal{V}}^{n_2, \dots, n_r}. \tag{19}$$

On the one hand, $\partial + \mu$ is an invertible operator of $\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ for any $\mu \in \mathbb{C}^*$ and the inverse operator

$$(\partial + \mu)^{-1} = \sum_{r \geq 0} \mu^{-r-1}(-\partial)^r \tag{20}$$

leaves $z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ invariant; on the other hand, when $\mu = 0$, ∂ induces an isomorphism $z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]] \rightarrow z^{-2}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$.

For $r = 1$, equation (19) has a unique solution in $z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$, because the right-hand side is \tilde{a}_{n_1} , element of $z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$, and even of $z^{-2}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ when $n_1 = 0$. By induction, for $r \geq 2$, we get a right-hand side in $z^{-2}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ and a unique solution \tilde{V}^ω in $z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ for $\omega = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r$. Moreover, with the notation $\omega = (n_2, \dots, n_r)$, we have

$$v(\tilde{V}^\omega) \geq \alpha^\omega + v(\tilde{V}^{\omega'}), \quad \text{with } \alpha^\omega = \begin{cases} 0 & \text{if } n_1 + \dots + n_r = 0 \text{ and } n_1 \neq 0, \\ 1 & \text{if } n_1 + \dots + n_r \neq 0 \text{ or } n_1 = 0, \end{cases}$$

where v denotes the standard valuation of $\mathbb{C}[[z^{-1}]]$. Thus $v(\tilde{V}^\omega) \geq \text{card } \mathcal{R}^\omega$, with $\mathcal{R}^\omega = \{i \in [1, r] \mid n_i + \dots + n_r \neq 0 \text{ or } n_i = 0\}$ for $r \geq 1$.

Let us check that $\text{card } \mathcal{R}^\omega \geq \lceil r/2 \rceil$. This stems from the fact that if $i \notin \mathcal{R}^\omega$, $i \geq 2$, then $i - 1 \in \mathcal{R}^\omega$ (indeed, in that case $n_{i-1} + \dots + n_r = n_{i-1}$), and that \mathcal{R}^ω has at least one element, namely r . The inequality is thus true for $r = 1$ or 2 ; by induction, if $r \geq 3$, then $\mathcal{R}^\omega \cap [3, r] = \mathcal{R}^{\omega'}$ with $\omega' = (n_3, \dots, n_r)$ and either $2 \in \mathcal{R}^\omega$, or $2 \notin \mathcal{R}^\omega$ and $1 \in \mathcal{R}^\omega$, thus $\text{card } \mathcal{R}^\omega \geq 1 + \text{card } \mathcal{R}^{\omega'}$. \square

The formal summability of the family $(\mathcal{V}^\omega \mathbf{B}_\omega)$ follows from (17) if we use the modified valuation of footnote 2. Indeed, one gets $\text{val}(\mathcal{V}^{n_1, \dots, n_r} \mathbf{B}_{n_1, \dots, n_r}) \geq n_1 + \dots + n_r + 2r$. The n_i 's may be negative but they are always ≥ -1 , thus $n_1 + \dots + n_r + r \geq 0$. Therefore, for any $\delta > 0$, the condition $n_1 + \dots + n_r + 2r \leq \delta$ implies $r \leq \delta$ and $\sum(n_i + 1) = n_1 + \dots + n_r + r \leq \delta$. Since this condition is fulfilled only a finite number of times, the summability follows.

Setting $\Theta = \sum \mathcal{V}^\bullet \mathbf{B}_\bullet$, we thus get a solution of the conjugacy equation (8) and Θ is a continuous operator of \mathcal{A} .

But is Θ an algebra automorphism? If one takes for granted the existence of a unique θ of the form (3) which solves (4) (and this is not hard to check), then one can easily identify the operator Θ that we just defined with the substitution operator corresponding to θ and Θ is thus an algebra automorphism. But it is possible to prove directly this fact by checking a certain symmetry property of the mould \mathcal{V}^\bullet , called *symmetry*.

7 Cosymmetry and symmetry

Let us return for a while to the general context of Section 5, with an alphabet \mathcal{N} and a commutative \mathbb{C} -algebra \mathbf{A} , focusing on the case where \mathbf{B}_\bullet is the multiplicative comould generated by a family of \mathbf{A} -linear derivations $(B_n)_{n \in \mathcal{N}}$ of a commutative algebra \mathcal{A} .

We thus assume that \mathcal{A} is a commutative \mathbf{A} -algebra, on which a complete ring pseudovaluation ν is given, that $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{A}, \nu}$ and that, for each $n \in \mathcal{N}$, we are given $B_n \in \mathcal{F}$ satisfying the Leibniz rule

$$B_n(fg) = (B_n f)g + f(B_n g), \quad f, g \in \mathcal{A}.$$

This property can be rewritten

$$\sigma(B_n) = B_n \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes B_n,$$

with the notation $\sigma : \text{End}_{\mathbf{A}} \mathcal{A} \rightarrow \text{Bil}_{\mathbf{A}}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}, \mathcal{A})$ for the composition with the multiplication of \mathcal{A} and $\Theta_1 \otimes \Theta_2(f, g) := (\Theta_1 f)(\Theta_2 g)$ for any $\Theta_1, \Theta_2 \in \text{End}_{\mathbf{A}} \mathcal{A}$.

We now consider the comould defined by

$$\mathbf{B}_\emptyset = \text{Id}, \quad \mathbf{B}_\omega = B_{n_r} \cdots B_{n_1} \quad \text{for non-empty } \omega = (n_1, \dots, n_r) \in \mathcal{N}^\bullet.$$

One can easily check, by iteration of the Leibniz rule, that

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{B}_{(n_1, n_2)}) &= \mathbf{B}_{(n_1, n_2)} \otimes \mathbf{B}_\emptyset + \mathbf{B}_{(n_1)} \otimes \mathbf{B}_{(n_2)} + \mathbf{B}_{(n_2)} \otimes \mathbf{B}_{(n_1)} + \mathbf{B}_\emptyset \otimes \mathbf{B}_{(n_1, n_2)}, \\ \sigma(\mathbf{B}_{(n_1, n_2, n_3)}) &= \mathbf{B}_{(n_1, n_2, n_3)} \otimes \mathbf{B}_\emptyset \\ &\quad + \mathbf{B}_{(n_1, n_2)} \otimes \mathbf{B}_{(n_3)} + \mathbf{B}_{(n_1, n_3)} \otimes \mathbf{B}_{(n_2)} + \mathbf{B}_{(n_2, n_3)} \otimes \mathbf{B}_{(n_1)} \\ &\quad + \mathbf{B}_{(n_3)} \otimes \mathbf{B}_{(n_1, n_2)} + \mathbf{B}_{(n_2)} \otimes \mathbf{B}_{(n_1, n_3)} + \mathbf{B}_{(n_1)} \otimes \mathbf{B}_{(n_2, n_3)} \\ &\quad \quad \quad + \mathbf{B}_\emptyset \otimes \mathbf{B}_{(n_1, n_2, n_3)}, \end{aligned}$$

the general formula being

$$\sigma(\mathbf{B}_\omega) = \mathbf{B}_\omega \otimes \mathbf{B}_\emptyset + \sum_{\substack{\omega^1, \omega^2 \in \mathcal{N}^\bullet \\ \omega^1, \omega^2 \neq \emptyset}} \text{sh} \begin{pmatrix} \omega^1, \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} \mathbf{B}_{\omega^1} \otimes \mathbf{B}_{\omega^2} + \mathbf{B}_\emptyset \otimes \mathbf{B}_\omega, \quad (21)$$

where $\text{sh} \begin{pmatrix} \omega^1, \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}$ denotes the number of obtaining ω by *shuffling* of ω^1 and ω^2 : it is the number of permutations σ such that one can write $\omega^1 = (\omega_1, \dots, \omega_\ell)$, $\omega^2 = (\omega_{\ell+1}, \dots, \omega_r)$ and $\omega = (\omega_{\sigma(1)}, \dots, \omega_{\sigma(r)})$ with the property $\sigma^{-1}(1) < \dots < \sigma^{-1}(\ell)$ and $\sigma^{-1}(\ell+1) < \dots < \sigma^{-1}(r)$ (thus it is non-zero only if ω can be obtained by interdigitating the letters of ω^1 and those of ω^2 while preserving their internal order in ω^1 or ω^2).

In case one of the words $\omega^1, \omega^2, \omega$ is empty, we extend the definition by $\text{sh} \begin{pmatrix} \emptyset, \omega \\ \omega \end{pmatrix} = \text{sh} \begin{pmatrix} \omega, \emptyset \\ \omega \end{pmatrix} = 1$, the value being 0 in the other cases; thus (21) can be written

$$\sigma(\mathbf{B}_\omega) = \sum_{\omega^1, \omega^2 \in \mathcal{N}^\bullet} \text{sh} \begin{pmatrix} \omega^1, \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} \mathbf{B}_{\omega^1} \otimes \mathbf{B}_{\omega^2}. \quad (22)$$

Any comould satisfying (22) is said to be *cosymmetrical*.

Dually, one says that a mould M^\bullet is *symmetrical* if and only if $M^\emptyset = 1$ and, for any two non-empty words ω^1, ω^2 ,

$$\sum_{\omega \in \mathcal{N}^\bullet} \text{sh} \begin{pmatrix} \omega^1, \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} M^\omega = M^{\omega^1} M^{\omega^2}. \quad (23)$$

One says that a mould M^\bullet is *alternal* if and only if $M^\emptyset = 0$ and, for any two non-empty words ω^1, ω^2 , the above sum vanishes.

Suppose that \mathbf{B}_\bullet is cosymmetrical and that the family $(M^\omega \mathbf{B}_\omega)$ is formally summable, with $\Theta = \sum M^\bullet \mathbf{B}_\bullet$. It is easy to check that

$$\begin{aligned} M^\bullet \text{ symmetrical} &\Rightarrow \sigma(\Theta) = \Theta \otimes \Theta, \\ M^\bullet \text{ alternal} &\Rightarrow \sigma(\Theta) = \Theta \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes \Theta. \end{aligned}$$

In other words, contraction with a symmetral mould yields an automorphism, while contraction with an alternal mould yields a derivation.

Symmetral and alternal moulds satisfy many stability properties (see [Sau08] §5). Here we just mention that the multiplicative inverse \widetilde{M}^\bullet of a symmetral mould M^\bullet is the symmetral mould defined by

$$\widetilde{M}^{n_1, \dots, n_r} = (-1)^r M^{n_r, \dots, n_1}. \tag{24}$$

Since the multiplicative comould generated by a family of derivations is cosympetral, in the case of the saddle-node it is sufficient to check the following lemma to prove that the Θ defined in Section 6 is indeed an automorphism:

Lemma 7.1. *The mould \mathcal{V}^\bullet defined by Lemma 6.2 is symmetral.*

Proof. We must show that

$$\mathcal{V}^\alpha \mathcal{V}^\beta = \sum_{\gamma \in \mathcal{N}^\bullet} \text{sh} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mathcal{V}^\gamma, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{N}^\bullet. \tag{25}$$

Since $\mathcal{V}^\emptyset = 1$, this is obviously true for α or $\beta = \emptyset$. We now argue by induction on $r = r(\alpha) + r(\beta)$. We thus suppose that $r \geq 1$ and, without loss of generality, both of α and β non-empty. With the notations $d = x^2 \frac{d}{dx}$, $\|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{r(\alpha)}$ and $\|\beta\| = \beta_1 + \dots + \beta_{r(\beta)}$, we compute

$$\begin{aligned} A &:= (d + \|\alpha\| + \|\beta\|) \sum_{\gamma} \text{sh} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mathcal{V}^\gamma \\ &= \sum_{\gamma \neq \emptyset} \text{sh} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{pmatrix} (d + \|\gamma\|) \mathcal{V}^\gamma = \sum_{\gamma \neq \emptyset} \text{sh} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{pmatrix} a_{\gamma_1} \mathcal{V}^{\gamma'}, \end{aligned}$$

using the notations $\|\gamma\| = \gamma_1 + \dots + \gamma_s$ and $\gamma' = (\gamma_2, \dots, \gamma_s)$ for any non-empty $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ (with the help (16) for the last identity). Splitting the last summation according to the value of γ_1 , which must be α_1 or β_1 , we get

$$A = \sum_{\delta} \text{sh} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \delta \end{pmatrix} a_{\alpha_1} \mathcal{V}^\delta + \sum_{\delta} \text{sh} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \delta \end{pmatrix} a_{\beta_1} \mathcal{V}^\delta = a_{\alpha_1} \mathcal{V}^{\alpha'} \cdot \mathcal{V}^\beta + \mathcal{V}^\alpha \cdot a_{\beta_1} \mathcal{V}^{\beta'}$$

(using the induction hypothesis), hence, using again (16),

$$A = (d + \|\alpha\|) \mathcal{V}^\alpha \cdot \mathcal{V}^\beta + \mathcal{V}^\alpha \cdot (d + \|\beta\|) \mathcal{V}^\beta = (d + \|\alpha\| + \|\beta\|) (\mathcal{V}^\alpha \mathcal{V}^\beta).$$

We conclude that both sides of (25) must coincide, because $d + \|\alpha\| + \|\beta\|$ is invertible if $\|\alpha\| + \|\beta\| \neq 0$ and both of them belong to $x\mathbb{C}[[x]]$, thus even if $\|\alpha\| + \|\beta\| = 0$ the desired conclusion holds. \square

8 Resurgence of the formal conjugacy

At this stage, we have found formal series $\mathcal{V}^\omega \in \mathbb{C}[[x]]$ which determine a formally continuous algebra automorphism $\Theta = \sum \mathcal{V}^\bullet \mathbf{B}_\bullet$ conjugating X_0 and X .

Since $\Theta x = x$, we deduce that Θ is the substitution operator associated with the formal transformation $\theta(x, y) = (x, \varphi(x, y))$ where $\varphi = \Theta y$. This is what was announced in (3).

The components $\varphi_n(x)$ of $\varphi(x, y)$ are easily computed: one checks by induction that

$$\mathbf{B}_\omega y = \beta_\omega y^{n_1 + \dots + n_r + 1}, \quad \omega = (n_1, \dots, n_r), r \geq 1, \tag{26}$$

with $\beta_\omega = 1$ if $r = 1$, $\beta_\omega = (n_1 + 1)(n_1 + n_2 + 1) \dots (n_1 + \dots + n_{r-1} + 1)$ if $r \geq 2$; one has $\beta_\omega = 0$ whenever $n_1 + \dots + n_r \leq -2$ (since (26) holds a priori in the fraction field $\mathbb{C}((y))$ but $\mathbf{B}_\omega y$ belongs to $\mathbb{C}[[y]]$), hence

$$\varphi(x, y) = \Theta y = y + \sum_{n \geq 0} \varphi_n(x) y^n, \quad \varphi_n = \sum_{\substack{r \geq 1, \omega \in \mathbb{N}^r \\ n_1 + \dots + n_r + 1 = n}} \beta_\omega \mathcal{V}^\omega \tag{27}$$

(in the series giving φ_n , there are only finitely many terms for each r , (17) thus yields its formal convergence in $x\mathbb{C}[[x]]$).

Similarly, if we define \mathcal{V}^\bullet as the multiplicative inverse of \mathcal{V}^\bullet with the help of formula (24), then $\Theta^{-1} = \sum \mathcal{V}^\bullet \mathbf{B}_\bullet$ is the substitution operator of a formal transformation $(x, y) \mapsto (x, \psi(x, y))$, which is nothing but θ^{-1} , and

$$\psi(x, y) = \Theta^{-1} y = y + \sum_{n \geq 0} \psi_n(x) y^n, \tag{28}$$

where each coefficient can be represented as a formally convergent series $\psi_n = \sum_{n_1 + \dots + n_r + 1 = n} \beta_\omega \mathcal{V}^\omega$.

These are remarkably explicit formulas, quite different from what one would have obtained by solving directly the differential equation (5) for $\tilde{\varphi}_0(z) = \varphi_0(-1/z)$ for instance.

An advantage of these formulas is that they allow to prove the resurgent character with respect to the variable $z = -1/x$ of all the formal series which appear in our problem. We recall that a formal series

$$\tilde{\varphi}(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^{-n-1} \in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$$

is said to be resurgent if its formal Borel transform

$$\widehat{\varphi}(\zeta) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{\zeta^n}{n!} \in \mathbb{C}[[\zeta]]$$

has positive radius of convergence and defines a holomorphic function of ζ which admits an analytic continuation along all the paths starting in its disc of convergence and lying in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ (see [Eca81], or [Sau05], or [Sau08]§8). It turns out that this property is stable by multiplication: the Borel transform of the Cauchy product $\tilde{\varphi} \cdot \psi$ is the convolution product $\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$, defined by

$$(\widehat{\varphi} * \widehat{\psi})(\zeta) = \int_0^\zeta \widehat{\varphi}(\zeta_1) \widehat{\psi}(\zeta - \zeta_1) d\zeta_1 \quad \text{for } |\zeta| \text{ small enough} \tag{29}$$

(with $\widehat{\varphi}$ and $\widehat{\psi}$ denoting the Borel transforms of $\widetilde{\varphi}$ and $\widetilde{\psi}$ respectively), and one can prove the required property of analytic continuation for $\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$ if it was assumed for $\widetilde{\varphi}$ and $\widetilde{\psi}$.

A simple example is provided by the formal series $\widetilde{\mathcal{V}}^\omega(z) = \mathcal{V}^\omega(-1/z)$: indeed, the Borel transforms of the convergent series $\widetilde{a}_n(z) = a_n(-1/z)$ are entire functions $\widehat{a}_n(\zeta)$ and the Borel counterpart of $\partial = \frac{d}{dz}$ is multiplication by $-\zeta$, hence (19) yields

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{V}}^{n_1}(\zeta) &= -\frac{1}{\zeta - n_1} \widehat{a}_{n_1}(\zeta) \\ \widehat{\mathcal{V}}^{n_1, n_2}(\zeta) &= \frac{1}{\zeta - (n_1 + n_2)} (\widehat{a}_{n_1} * \widehat{\mathcal{V}}^{n_2}) \\ &\vdots \\ \widehat{\mathcal{V}}^{n_1, \dots, n_r} &= (-1)^r \frac{1}{\zeta - \widehat{n}_1} \left(\widehat{a}_{n_1} * \left(\frac{1}{\zeta - \widehat{n}_2} \left(\widehat{a}_{n_2} * \left(\dots \left(\frac{1}{\zeta - \widehat{n}_r} \widehat{a}_{n_r} \right) \dots \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

with $\widehat{n}_i = n_i + \dots + n_r$. Since the \widehat{a}_n 's are entire functions of ζ , the function $\widehat{\mathcal{V}}^{n_1, \dots, n_r}$ is holomorphic with $\widehat{n}_1, \dots, \widehat{n}_r$ as only possible singularities.

Moreover, the above formula is sufficiently explicit to make it possible to give majorant series arguments so as to prove the uniform convergence of the series of holomorphic functions

$$\widehat{\varphi}_n = \sum_{n_1 + \dots + n_r + 1 = n} \beta_\omega \widehat{\mathcal{V}}^\omega, \quad \widehat{\psi}_n = \sum_{n_1 + \dots + n_r + 1 = n} \beta_\omega \widehat{\mathcal{V}}^\omega$$

(§8 of [Sau08] is devoted to this task); in other words, *the formal series φ_n and ψ_n are resurgent with respect to $z = -1/x$.*

9 Conclusion

9.1. The reader is referred to [Eca84] or [Sau08] §9–11 for the resurgent approach to the question of the analytic classification of saddle-node singularities, which one can develop once the analytic structure of the functions $\widehat{\varphi}_n(\zeta)$ is clear. This approach relies on the use of Écalle's *alien calculus*: the singularities in the ζ -plane are controlled through operators Δ_m , $m \in \mathbb{Z}^*$, called alien derivations; mould calculus allows one to summarize the singular structure of the functions $\widehat{\mathcal{V}}^\omega$ in the simple equation

$$\Delta_m \widetilde{\mathcal{V}}^\bullet = \widetilde{\mathcal{V}}^\bullet \times V^\bullet(m),$$

where $V^\bullet(m)$ is an alternal scalar-valued mould (the V^ω 's are complex numbers), with $n_1 + \dots + n_r \neq m \Rightarrow V^{n_1, \dots, n_r}(m) = 0$.

This leads to Écalle's "Bridge Equation" for Θ , which gives the alien derivatives of all the resurgent functions $\widehat{\varphi}_n$ and in which the resurgent solution of the analytic classification problem is subsumed.

9.2. Another application of mould calculus in Resurgence theory is the use of the formal series $\tilde{\mathcal{V}}^\omega$ to construct “resurgence monomials” $\tilde{\mathcal{U}}^\omega$ which behave as simply as possible under alien derivation. This allows one to prove that alien derivations generate an infinite-dimensional free Lie algebra (see [Sau08]§12).

9.3. Other problems of formal normalisation can be handled by an approach similar to the one explained in Section 4. See [Sau08]§13 for the simple case of the linearisation of a vector field with non-resonant spectrum; much more complicated situations (taking into account resonances) are considered in [ES93] or [EV98]. The strategy always begins by expanding the object to study in a sum of homogeneous components B_n and considering the corresponding multiplicative comould \mathbf{B}_\bullet .

It must be mentioned that, when this is applied to the analysis of a local diffeomorphism, rather than a local vector field, the operators B_n are no longer derivations, but they still satisfy a kind of modified Leibniz rule:

$$\sigma(B_n) = B_n \otimes \text{Id} + \sum_{n'+n''=n} B_{n'} \otimes B_{n''} + \text{Id} \otimes B_n.$$

The resulting comould is not cosymmetral but cosymmetrel, a property which involves “contracting shuffling coefficients” instead of the shuffling coefficients $\text{sh}(\omega^1, \omega^2)$. Correspondingly, the relevant symmetry properties for the moulds to be contracted into \mathbf{B}_\bullet are “symmetrelity” and “alternelity”.

The theory can thus be extended so as to treat on an equal footing vector fields and diffeomorphisms.

References

- [Eca81] J. Écalle, *Les fonctions résurgentes*, Publ. Math. d’Orsay 81-05, 1981; ibid. 81-06, 1981; ibid. 85-05, 1985.
- [Eca84] J. Écalle, *Cinq applications des fonctions résurgentes*, Publ. Math. d’Orsay 84-62, 1984.
- [ES93] J. Écalle and D. Schlomiuk, *The nilpotent part and distinguished form of resonant vector fields or diffeomorphisms*, Ann. Inst. Fourier **43** (5), 1407–1483, 1993.
- [EV98] J. Écalle and B. Vallet, *Correction and linearization of resonant vector fields and diffeomorphisms*, Math. Z. **229** (2), 249–318, 1998.
- [MR82] J. Martinet and J.-P. Ramis, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publ. Math. I.H.É.S. **55**, 63–164, 1982.
- [Mou93] R. Moussu, *Singularités d’équations différentielles holomorphes en dimension deux*, in D. Schlomiuk (ed.) *Bifurcations and periodic orbits of vector fields*, NATO ASI Ser. C **408**, 321–345, 1993.

- [Sau05] D. Sauzin, *Resurgent functions and splitting problems*, RIMS Kokyuroku **1493**, 48–117, 2005.
- [Sau08] D. Sauzin, *Mould expansions for the saddle-node and resurgence monomials*, arXiv:0712.2337. To appear in A. Connes, F. Fauvet and J.-P. Ramis (ed.) *Proceedings of the international conference on Renormalization and Galois theories (CIRM, Luminy, March 2006)*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, 2008.

Institut de mécanique céleste, CNRS
77 av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
email: sauzin@imcce.fr

HYPERSURFACES WITH UNEXPECTED TANGENCIES

ISRAEL VAINSENER[♥]

ABSTRACT. We give a formula for the degree of the subvariety parametrizing the family of hypersurfaces containing a point where a hyperplane cuts a higher singularity.

1. INTRODUCTION

For a general plane curve X of degree ≥ 2 , any tangent line is at most inflexional. The Fermat curves $x^d + y^d + z^d = 0$, $d \geq 4$ are examples of curves $X \subset \mathbb{P}^2$ with higher flexes *i.e.*, a point $P \in X$ and a line L such that $L \cdot X \geq 4P$. In fact, there is a codimension one family of curves of degree ≥ 4 with a higher flex.

If we look at contacts of lines and a surface in \mathbb{P}^3 , we see that for a general surface there are finitely many lines with a fivefold contact. The family of surfaces for which there is a line with a *sixfold* contact corresponds to a hypersurface in the projective space parametrizing the family of surfaces of a given degree.

Let $X \subset \mathbb{P}^3$ be a general surface of degree ≥ 2 . The tangent plane at any $P \in X$ cuts a quadratic singularity at P . One also knows that, for any smooth surface, most tangent planes cut a quadratic singularity. Again, for example a Fermat cubic surface exhibits points which are a triple point for a plane section. Let us call such a point a $(2, 3)$ -contact. The locus of surfaces of degree ≥ 3 displaying such a $(2, 3)$ -contact is of codimension one.

The usual Plücker formulas for a smooth plane curve give relations for the number of flexes and bi-tangents in terms of the degree. These formulas have been extended in several directions, allowing singularities and increasing the dimension, cf. [4], [5], [6]. Here we ask instead for the degree of the loci parametrizing those hypersurfaces which possess unexpected tangencies with linear spaces of some fixed dimension.

We may as well look at hypersurfaces in an arbitrary \mathbb{P}^n rather than just \mathbb{P}^3 . We fix integers $k \geq 1, m \geq 2$ and ask for hypersurfaces of degree d for which there exists a point where a subspace of dimension k cuts a singularity of multiplicity $\geq m$. We call such a point a (k, m) -contact.

1991 *Mathematics Subject Classification*. 14N10 (Primary); 14C20, 14H40, 14K05 (Secondary).

Key words and phrases. intersection theory; enumerative geometry; Bott's residue formula.

Partially supported by [♥]CNPq.

For instance, in \mathbb{P}^2 , we may ask for the locus of curves which display a hyperflex, that is, take $n = 2, m = 4, k = 1$. Of course for a plane curve a (1,3)-contact is just a flex. The family of plane curves with a (1, m)-contact is of codimension $m - 3$. Take $m = d$; a plane curve of degree d with a (1, d)-contact is called a *curve with total contact*. The family of plane curves of degree d with total contact is of codimension $d - 3$. Thus, plane quartics with total contact form a hypersurface.

We present Plücker-like formulas for the degree of the variety parametrizing the family of hypersurfaces of degree d in \mathbb{P}^n with a (k, m) -contact.

For example, the number of surfaces of degree d in \mathbb{P}^3 passing through the appropriate number of points and possessing one (2,3)-contact is

$$u(d) = 20(2d - 1)(d - 2)^2.$$

Thus, there are 100 cubic surfaces in a general pencil in \mathbb{P}^3 displaying a (2,3)-contact. Such pencils define a foliation in \mathbb{P}^3 : for a general point $P \in \mathbb{P}^3$, one picks the member of the pencil that goes through P then one attaches the tangent plane at P . The formula can be interpreted as the number of points where the leave cuts the plane with higher contact.

The formulas for higher contacts with a hyperplane are obtained by studying the natural correspondence

$$\{(p, H, F) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N \mid p \text{ is (at least) a } m\text{-fold point in } H \cap F\}.$$

In the case of (2,3)-contacts for surfaces in \mathbb{P}^3 , the condition on the point p means the following in terms of homogeneous coordinates x_0, \dots, x_3 . Say $m = 3$, $P = [0, 0, 0, 1]$ and $H = x_0$. Then we require the polynomial $F(0, x_1, x_2, 1)$ to have no term of degree less than three. Let us give now a reformulation suitable for global description. Put $G = F(0, x_1, x_2, x_3)$, a homogeneous polynomial of degree d . Think of the plane curve it defines. For each point $Q = [y_1, y_2, y_3]$ in the plane, we can form the quadratic polynomial

$$G^Q(x_1, x_2, x_3) = \sum \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(Q) x_i x_j.$$

In a somewhat more invariant fashion, let \mathcal{G}_0 be the vector space spanned by x_1, x_2, x_3 , thought of as homogeneous coordinates in \mathbb{P}^2 . Let $S_d \mathcal{G}_0$ be the space of homogeneous polynomials of degree d in x_1, x_2, x_3 . Let $\mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{G}_0^\vee$ be the tautological subbundle over \mathbb{P}^2 . The fiber of $\mathcal{O}(-1)$ over Q is just the line in \mathcal{G}_0^\vee spanned by $y = (y_1, y_2, y_3)$. It makes sense to evaluate a linear function $w \in \mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0^{\vee\vee}$ at $y \in \mathcal{G}_0^\vee$.

We get an induced map of bundles over \mathbb{P}^2 ,

$$\begin{array}{ccc} S_d \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{O}(-1)^{\otimes(d-2)} & \xrightarrow{\varepsilon} & S_2 \mathcal{G}_0 \\ w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_d \otimes y^{\otimes(d-2)} & \mapsto & \sum_i w_{i_1}(y) \cdot \dots \cdot w_{i_{d-2}}(y) w_{i_{d-1}} w_{i_d}. \end{array}$$

Put $Q = [0, 0, 1] \in \mathbb{P}^2$. Let us examine the the fiber ε_Q . We have

$$x_1(Q) = x_2(Q) = 0 \neq x_3(Q).$$

Therefore, for a monomial $x^I = x_1^i x_2^j x_3^{d-i-j}$, the image of $x^I \otimes Q^{\otimes(d-2)}$ is equal to

$$\begin{cases} \text{zero} & \text{if } i + j \geq 3; \\ (d-2)!x_3(Q)^{d-2}x_1x_2 & \text{if } i = j = 1; \\ 2(d-2)!x_3(Q)^{d-2}x_1x_3 & \text{if } i = 2, j = 0; \\ 2(d-2)!x_3(Q)^{d-2}x_2x_3 & \text{if } i = 0, j = 2; \\ \binom{d}{2}x_3(Q)^{d-2}x_3^2 & \text{if } i = j = 0. \end{cases}$$

It is clear that ε_Q vanishes precisely on the subspace of $S_d\mathcal{G}_0 \otimes Q^{\otimes(d-2)}$ corresponding to polynomials $G(x_1, x_2, x_3)$ such that the dehomogeneization $G(x_1, x_2, 1)$ starts in degree 3.

Slightly more generally, we now let the k -subspace $H \subset \mathbb{P}^n$ as well as the point $P \in \mathbb{P}^n$ vary.

Put $\mathcal{F} = (\mathbb{C}^{n+1})^* = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$. Form the grassmannian $\mathbb{G} = G(\mathcal{F}, k + 1)$ of $(k + 1)$ -quotients. Let

$$\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$$

be the tautological quotient bundle over \mathbb{G} . Consider the \mathbb{P}^k -bundle $\mathbb{P}(\mathcal{G}^*)$ over \mathbb{G} . This is the incidence subvariety of $\mathbb{P}^n \times \mathbb{G}$,

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}^*) = \{(P, H) \mid P \in H\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{G}.$$

The space \mathcal{G}_0 in the previous discussion is but a fiber of \mathcal{G} . The map ε globalizes and its twist $\varepsilon' = \varepsilon \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}^*}(d - m)$ fits into the commutative diagram over $\mathbb{P}(\mathcal{G}^*)$,

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_d^{k,m} & \twoheadrightarrow & S_d\mathcal{F} & \twoheadrightarrow & S_{m-1}\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}^*}(d - m + 1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{G}_d^{k,m} & \twoheadrightarrow & S_d\mathcal{G} & \xrightarrow{\varepsilon'} & S_{m-1}\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}^*}(d - m + 1). \end{array}$$

We have the following.

1. Proposition. *Set $\mathcal{G}_d^{k,m} = \ker \varepsilon' \subset S_d\mathcal{G}$ and let $\mathcal{F}_d^{k,m} \subset S_d\mathcal{F}$ be the inverse image of \mathcal{G}_d under the natural epimorphism $S_d\mathcal{F} \twoheadrightarrow S_d\mathcal{G}$ as in the previous diagram. Then the projective subbundle $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^{k,m}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{G}^*) \times \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ maps birationally onto the subvariety, $\mathbb{W}_d^{k,m} \subseteq \mathbb{P}^{N_d} = \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ parametrizing the family of hypersurfaces of degree d displaying a (k, m) -contact. We also have the dimension count:*

$$\dim \mathbb{W}_d^{k,m} = \text{rank } \mathcal{F}_d^{k,m} - 1 + (k + 1)n - k^2 = \binom{n+d}{n} - 1 - \binom{k+m-1}{k} + (k + 1)n - k^2.$$

Moreover, the general member of $\mathbb{W}_d^{k,m}$ is a smooth hypersurface with precisely one (k, m) -contact provided $m \leq d$.

2. Remark. It would be interesting to find the degree of the double points locus, *i.e.*, the closure of the image of the set of triples $(F, P, H) \in \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^{k,m})$. One needs to check whether the double point formula applies, cf. [1], [2], [3]. Similarly for mixed values of k , *e.g.*, study the locus of hypersurfaces with high contact with some line and some plane.

3. Corollary. *The degree of the variety $\mathbb{W}_d^{k,m}$ parameterizing the hypersurfaces of degree d with a (k, m) -contact is given by*

$$\int_{\mathbb{P}(\mathcal{G}^*)} c_{(k+1)n-k^2}(S_{m-1}\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{G}^*}(d-m+1)).$$

Proof. Let p_1, p_2 be the projection maps from $\mathbb{P}(\mathcal{G}^*) \times \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$. Put

$$\begin{cases} N = \dim \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) = \binom{n+d}{n} - 1, \\ w = \dim \mathbb{W}_d^{k,m}, \\ h_2 = c_1 \mathcal{O}_{S_d\mathcal{F}}(1). \end{cases}$$

Since the restriction $p_2 : \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^{k,m}) \rightarrow \mathbb{W}_d^{k,m}$ is birational, the degree can be computed as

$$\begin{aligned} \int h_2^w \cap \mathbb{W}_d^{k,m} &= \int p_2^* h_2^w \cap \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^{k,m}) \\ &= \int p_{1*} p_2^* h_2^w \cap \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^{k,m}). \end{aligned}$$

Since $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^{k,m})$ is a projective subbundle of $\mathbb{P}(\mathcal{G}^*) \times \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ over $\mathbb{P}(\mathcal{G}^*)$, this degree is equal to the top dimensional Segre class $s_\tau \mathcal{F}_d^{k,m}$, with

$$\tau = \dim \mathbb{P}(\mathcal{G}^*) = (k+1)(n-k) + k = (k+1)n - k^2.$$

In view of (1), that Segre class is the same as the Chern class $c_\tau(\mathcal{H})$, where

$$\mathcal{H} = S_{m-1}\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{G}^*}(d-m+1).$$

Alternatively, we may use the fact that $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^{k,m})$ is the scheme of zeros of a section of $\mathcal{H}' := \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{S_d\mathcal{F}}(1)$ induced from (1). Hence, its class in the Chow group of $\mathbb{P}(\mathcal{G}^*) \times \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ is equal to the top Chern class of \mathcal{H}' . Note that $\text{rank } \mathcal{H} = N + \tau - w$. Pushing forward via p_2 , only the coefficient, $c_\tau(\mathcal{H})$, of h_2^{N-w} survives. \square

A slightly different approach can be set up by interpreting the diagram (1) in terms of the bundle of principal parts. As before, we look at the universal k -subspace $\mathbb{P}(\mathcal{G}^*) \rightarrow \mathbb{G}$. Form the family of hypersurfaces in the fibers, to wit, $\mathbb{P}(S_d\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{G}$. Consider in the fiber product $\mathbb{P}(S_d\mathcal{G}) \times_{\mathbb{G}} \mathbb{P}(\mathcal{G}^*)$ the correspondence

$$\Sigma(d, m) = \left\{ (G, p, H) \mid \begin{array}{l} p \text{ is a point of multiplicity } \geq m \\ \text{in the hypersurface } G \text{ of } H \end{array} \right\}.$$

This is a projective subbundle of $\mathbb{P}(S_d\mathcal{G}) \times_{\mathbb{G}} \mathbb{P}(\mathcal{G}^*) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{G}^*)$. We have a natural evaluation map from $S_d\mathcal{G}$ to the bundle of principal parts,

$$S_d\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{P}(\mathcal{G}^*)/\mathbb{G}}^{m-1}(d)$$

which is surjective for $d \geq m$. This bundle of principal parts is the same as the symmetric power $\text{Sym}^{m-1}(\mathcal{G}(d-(m-1)))$. It follows that the evaluation map is the same as the one in (1). Thus, we have

$$\Sigma(d, m) = \mathbb{P}(\mathcal{G}_d^{k,m}).$$

Continuing, we have that $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^{k,m}) \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{G}_d^{k,m})$ is a family of linear projections over the base $\mathbb{P}(\mathcal{G}^*)$. The center is the subfamily given by the hypersurfaces containing the k -subspace.

4. Corollary. *The degree of the curve of (2, 3)-contact on a general net of surfaces of degree d in \mathbb{P}^3 is*

$$\prod_{i=0}^2 (d-i) \prod_{i=1}^3 (d+i) (d^2 - 2d + 3) (2d^3 + 9d^2 + 7d - 12) / 5184.$$

Proof. Let $p : \mathbb{P}(\mathcal{G}^*) \rightarrow \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathcal{F}^*)$ be induced by projection from $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{G}$. Set $h_1 = c_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$. We also keep the notation introduced in the previous proof. Now $w = \dim \mathbb{W}_d^{2,3} = N - 1$, $\tau = 5$, $\text{rank } \mathcal{H} = \binom{2+3-1}{2} = 6$. The curve, C , of (2,3)-contact on a general net is the image, in \mathbb{P}^3 , via pp_1 , of the restriction of $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^{2,3}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{G}^*) \times \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ over a general net $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$. Just as in the previous proof, the calculation of the degree of C now requires the pushforward of the zero-cycle $p_1^* p^* h_1 \cdot p_2^* h_2^{N-2} \cdot c_6(\mathcal{H}')$. Expanding $c_6(\mathcal{H}') = c_6\mathcal{H} + h_2 c_5\mathcal{H} + h_2^2 c_4\mathcal{H} + \dots$, and recalling $\dim \mathbb{P}(\mathcal{G}^*) = 5$, we see that now the relevant coefficient is $p_1^* p^* h_1 \cdot c_4(\mathcal{H})$. □

2. PLANE CURVES WITH TOTAL CONTACT WITH A LINE

Let us look at the case of higher contacts of curves and lines in \mathbb{P}^2 . We have the following.

5. Corollary. *The variety of plane curves of degree d with an m -fold contact with a line is of codimension $m - 3$ and degree*

$$(2) \quad \frac{1}{8} m(m-1)(m-2)(d - (m-1))(2(m-1)d - m(m-3)).$$

Proof. Set $n = 2, k = 1$ in Prop.1 and Cor. 3. □

A smooth plane curve of degree d is said to have total contact with line if they meet at a unique point. For a fixed line ℓ and a given point $P \in \ell$, the closure in $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)|$ of the set of smooth plane curves of degree d meeting ℓ only at P is a linear subspace $\ell_{P,d}$ of codimension d . We've learned from Cicero Carvalho that these curves play a role in code theory.

6. Proposition. *Notation as above, the union*

$$\mathbb{W}_d = \bigcup \ell_{P,d} \subseteq |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)|$$

is an irreducible subvariety of codimension $d - 3$ and degree

$$\frac{1}{8} d^2 (d^2 - 1) (d - 2).$$

Proof. Take $m = d$ in (2). □

3. SURFACES WITH TOTAL CONTACT WITH A LINE

This is the case $n = 3, k = 1$. For a general $(m, 1)$ -contact we find a subvariety of $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d)|$ of codimension $m - 5$ and degree

$$m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)[d-(m-1)] [4(3m-1)(m-2)d^2 - 4(m-1)(3m^2-11m-2)d + m(m-5)(3m^2-7m-2)] / 576.$$

Setting $m = d$, we find the degree of the variety of surfaces of degree d in \mathbb{P}^3 with total contact with a line, to wit,

$$d^2(d-1)(d-2)(d-3)(d-4)(d+1)(3d^2+3d+2)/576.$$

For 3-folds in \mathbb{P}^4 , $(1,7)$ -contact is free; we have the number of such for a general 3-fold:

$$35d(d-6)(3d-10)(7d-12).$$

This is the integral of the top Chern class of the appropriate bundle of principal parts over the universal line.

The variety of 3-folds in \mathbb{P}^4 with total contact with a line is of codimension $d - 7$ and degree

$$d^2 \prod_{1 \leq i \leq 6} (d-i)(d+1)(9d^4 + 18d^3 + 27d^2 + 26d + 16) / (2^{10} \cdot 3^4)$$

Likewise, we get for 4-folds in \mathbb{P}^5 :

$$d^2 \prod_{1 \leq i \leq 8} (d-i)(d+1)(45d^6 + 135d^5 + 315d^4 + 565d^3 + 800d^2 + 780d + 432) / (2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^2).$$

5-folds in \mathbb{P}^6 :

$$d^2 \prod_{1 \leq i \leq 10} (d-i)(d+1)(9d^8 + 36d^7 + 114d^6 + 296d^5 + 649d^4 + 1156d^3 + 1596d^2 + 1520d + 768) / (2^{17} \cdot 3^5 \cdot 5^2).$$

6-folds in \mathbb{P}^7 :

$$d^2 \prod_{1 \leq i \leq 12} (d-i)(d+1)(945d^{10} + 4725d^9 + 18900d^8 + 64050d^7 + 189525d^6 + 483525d^5 + 1043630d^4 + 1834420d^3 + 2469880d^2 + 2266208d + 1061376) / (2^{20} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^2).$$

7-folds in \mathbb{P}^8 :

$$d^2 \prod_{1 \leq i \leq 14} (d-i)(d+1)(135d^{12} + 810d^{11} + 3915d^{10} + 16350d^9 + 60825d^8 + 201150d^7 + 586385d^6 + 1480610d^5 + 3154020d^4 + 5444248d^3 + 7132576d^2 + 6286080d + 2764800) / (2^{25} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^2).$$

8-folds in \mathbb{P}^9 :

$$d^2 \prod_{1 \leq i \leq 16} (d-i)(d+1) (405d^{14} + 2835d^{13} + 16065d^{12} + 79695d^{11} + 356895d^{10} + 1447425d^9 + 5299035d^8 + 17352405d^7 + 50120000d^6 + 125164536d^5 + 262674032d^4 + 444154320d^3 + 565615232d^2 + 479389440d + 200005632) / (2^{30} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2).$$

9-folds in \mathbb{P}^{10} :

$$d^2 \prod_{1 \leq i \leq 18} (d-i)(d+1) (8505t^{16} + 68040t^{15} + 442260t^{14} + 2540160t^{13} + 13296150t^{12} + 63821520t^{11} + 280841148t^{10} + 1127407680t^9 + 4095154665t^8 + 13304695208t^7 + 38062080616t^6 + 93871272320t^5 + 193775227408t^4 + 320619899264t^3 + 396939133696t^2 + 324388804608t + 129369047040) / (2^{33} \cdot 3^{13} \cdot 5^4 \cdot 7^3).$$

Well, there seems to be a pattern, but...

4. TOTAL CONTACT WITH A PLANE

We require the plane section to consist of d concurrent lines.

$$\mathbb{P}^3 : d^2(d-1)(d-2)(d+1)^2(d+2)^2(d+3)(d^2+d-8)(d^2-2d+3)/(2^7 \cdot 3^4).$$

Note that the codimension is $(d^2 + d - 10)/2$.

$$\mathbb{P}^4 : d^2(d-1)^2(d-2)(d-3)(d+1)^2(d+2)^2(d+3)(d+4)(d^2+d-14)(2d^8 + 2d^7 - 28d^6 + 20d^5 + 74d^4 - 274d^3 + 249d^2 - 531d + 108)/(2^{14} \cdot 3^8).$$

$$\mathbb{P}^5 : d^2(d-2)(d-3)(d-4)(d+5)(d+4)(d+3)(d^2+d-18)(50d^{15} + 150d^{14} - 1900d^{13} - 3300d^{12} + 27800d^{11} + 2700d^{10} - 167900d^9 + 259140d^8 + 39115d^7 - 381495d^6 + 2101825d^5 - 4417083d^4 + 6695226d^3 - 12658680d^2 + 4433616d - 10357632)(d-1)^2(d+2)^2(d+1)^2/(2^{19} \cdot 3^{12} \cdot 5^3)$$

$$\mathbb{P}^6 : d^2(d-2)(d-3)(d-4)(d+5)(d+4)(d+3)(d^2+d-24)(50d^{22} + 250d^{21} - 3400d^{20} - 14100d^{19} + 99750d^{18} + 276750d^{17} - 1613650d^{16} - 1790390d^{15} + 14035955d^{14} - 6065325d^{13} - 41530800d^{12} + 75513150d^{11} - 157527145d^{10} + 191281495d^9 + 89109020d^8 - 599600982d^7 + 3816268524d^6 - 6628417056d^5 + 18466509600d^4 - 27836606448d^3 + 25713101376d^2 - 60298634304d - 7936185600)(d^2+d-26)(d-1)^2(d+2)^2(d+1)^2/(2^{25} \cdot 3^{16} \cdot 5^4)$$

5. TOTAL CONTACT WITH A k -PLANE

Let us agree to say that a hypersurface of degree d has total contact with a k -plane at some point if the intersection is a cone with vertex containing that point. Formulas for the degree of the loci of hypersurfaces of degree d with a k -plane of total contact can be obtained. We hope to expand on this elsewhere.

REFERENCES

- [1] D. Laksov, *Secant bundles and Todd's formula for the double points of maps into P^n* . Proc. London Math. Soc. (3) 37 (1978), no. 1, 120–142.
- [2] _____, *Residual intersections and Todd's formula for the double locus of a morphism*. Acta Math. 140 (1978), no. 1–2, 75–92.
- [3] W. Fulton & D. Laksov, *Residual intersections and the double point formula*. Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), pp. 171–177. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.
- [4] R. Piene, *Some formulas for a surface in P^3* . Algebraic geometry (Proc. Sympos., Univ. Tromsø, Tromsø, 1977), pp. 196–235, Lecture Notes in Math., 687, Springer, Berlin, 1978.
- [5] _____, *Polar classes of singular varieties*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 11 (1978), no. 2, 247–276.
- [6] _____, *Numerical characters of a curve in projective n -space*. Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), pp. 475–495. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.

Departamento de Matemática
Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte, MG
CEP 30123-970
Brasil
israel@mat.ufmg.br

ÍNDICE GENERAL DEL VOLUMEN 3

El volumen **3** consta de cuatro fascículos sencillos más uno doble, lo que equivale a los seis fascículos sencillos de los volúmenes **1** y **2**. Cada fascículo está numerado independientemente, por lo que se ruega a las personas que hagan referencias a esta revista que no omitan el fascículo.

Fascículo I (2000)

- Lê D.T. y C. Weber:
Résoudre est un jeu d'enfants. 3–23
- N. Corral:
Curvas polares de una foliación singular. 25–33
- W. Balser:
*Recent results on multisummability
of power series in several variables.* 35–48
- M.R. González Dorrego:
On the normal bundle of curves on a Kummer surface in \mathbb{P}^3 . 49–56
- D. Marín:
*Rigidez topológica y módulos analíticos
de foliaciones holomorfas en superficies.* 57–64
- J. Jiménez Meana:
Operadores diferenciales en espacios analíticos. 65–81
- Índice general del volumen **1**. 83–84
- Índice general del volumen **2**. 85–86
- Relación de conferenciantes y conferencias. 87–93

Fascículo II (2003)

- G. Duval:
*Combinatoire énumérative des sommes itérées de Minkowski
dans un groupe abélien.* 3–20
- M. Sobolevsky:
Decomposição focal. 21–27

- C. Alonso:
Equivalencias topológicas para conexiones de sillas. 29–37
- J.J. Risler:
Sur la courbure totale des variétés réelles. 39–46
- J.P. Rolin:
*Fonctions logarithmico-exponentielles
et théorie des modèles des corps valués.* 47–55

Fascículo III (2005)

- D. Hacon, C. Mendes de Jesus y M.C. Romero Fuster:
*Aspectos globales de clasificación de las aplicaciones
de superficies compactas en el plano.* 3–23
- E. Corel:
El fibrado vectorial asociado a una ecuación diferencial fuchsiana. 25–33
- J. Seade:
Knots, Fibered Links and Singularities. 35–44
- S. Ibáñez:
*Órbitas Shil'nikov y bifurcaciones "cocoon"
en despliegues de singularidades.* 45–59

Fascículo IV (2007)

- C.R. Giraldo:
Matrices de Zorn sobre \mathbb{Z} e subloops de índice finito. 3–19
- Á. Lozano Rojo:
Espacios foliados definidos por grafos. 21–38
- M. Matusinski:
*Soporte de las soluciones de ecuaciones diferenciales con
coeficientes en cuerpos de series generalizadas de rango finito.* 39–50
- J.V. Pereira:
*Sobre a densidade de folheações sem soluções
algébricas.* 51–57
- C. Plénat:
The Nash problem of arcs. 59–64

Fascículo V-VI (2008)

- F. Alcalde Cuesta y P. González Sequeiros:
Espacios foliados definidos por mosaicos. 3–32
- F.E. Brochero Martínez:
Dinámica de difeomorfismos dicríticos en $(\mathbb{C}^n, 0)$. 33–40
- F. Cano:
Dicriticidad de foliaciones holomorfas de codimensión uno. 41–48
- F. Cano, C. Roche y M. Spivakovsky:
Uniformización local en característica cero. 49–64
- A. Lastra:
Operadores de extensión para el problema de momentos de Stieltjes en los espacios de Gelfand-Shilov clásicos. 65–77
- M. Macho Stadler:
Espacios foliados: el punto de vista no conmutativo. 79–93
- D. Marín:
La topología de las hojas de ciertas foliaciones singulares. 95–108
- S. Mazuelas:
Interpretación proyectiva de las métricas del plano real. 109–125
- G. Rond:
Propriétés de régularité des morphismes d’algèbres analytiques. 127–147
- D. Sauzin:
Initiation to mould calculus through the example of saddle-node singularities. 149–162
- I. Vainsencher:
Hypersurfaces with unexpected tangencies. 163–170
- Índice general del volumen **3**. 171–173

ARTÍCULOS DE PRÓXIMA APARICIÓN

- F. Lucas, J. J. Madden, D. Schaub y M. Spivakovsky:
Introducción a la conjetura de Pierce–Birkhoff y el espectro real.