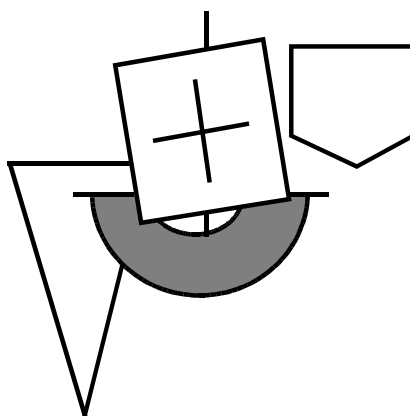


INSTITUTO INTERUNIVERSITARIO  
DE ESTUDIOS DE  
IBEROAMÉRICA Y PORTUGAL

*Seminarios Temáticos*



Revista del

Seminario Iberoamericano de Matemáticas  
Casas del Tratado. Tordesillas

**Consejo de redacción:**

José Manuel Aroca, Felipe Cano, José Cano,  
Percy Fernández, Jorge Mozo, Jorge Vitorio Pereira,  
Fernando Sanz, José Seade.

**Secretarios de redacción:**

Alberto Llorente, Lorena López

VOLUMEN 3  
FASCÍCULO IV  
(2007)

## **Universidad de Valladolid**

Instituto Interuniversitario de Estudios de Iberoamérica y Portugal  
*Seminario Iberoamericano de Matemáticas*  
Casas del Tratado  
47100 Tordesillas  
Valladolid, España

Depósito Legal: VA-359-1996  
ISSN: 1136-3894

Imprime: MATA. Plaza de la Universidad nº 3, Valladolid

© 2007 Seminario Iberoamericano de Matemáticas

En esta revista se publican las conferencias del Seminario Iberoamericano de Matemáticas, dependiente del Instituto Interuniversitario de Estudios de Iberoamérica y Portugal, en su sección de la Universidad de Valladolid. Asimismo se publicarán trabajos expositivos de entre 10 y 20 páginas, sobre temas de interés en matemáticas. Los textos deben ser dirigidos a cualquier miembro del consejo de redacción o bien a alguno de los secretarios de redacción.

La revista se distribuye a bibliotecas de universidades de todo el mundo. Si algún particular desea recibirla, puede solicitarlo a los secretarios de redacción.

Para cualquier consulta, contactar con los secretarios de redacción en la dirección siguiente:

Instituto Interuniversitario de Estudios de Iberoamérica y Portugal  
Casas del Tratado  
47100 Tordesillas  
Valladolid, España  
Tfno: +34 983771806

Correo electrónico del consejo de redacción: [aroca@agt.uva.es](mailto:aroca@agt.uva.es), [fcano@agt.uva.es](mailto:fcano@agt.uva.es),  
[jcano@agt.uva.es](mailto:jcano@agt.uva.es), [pefernan@pucp.edu.pe](mailto:pefernan@pucp.edu.pe), [jmozo@maf.uva.es](mailto:jmozo@maf.uva.es), [jvp@impa.br](mailto:jvp@impa.br),  
[fsanz@agt.uva.es](mailto:fsanz@agt.uva.es), [jseade@matcuer.unam.mx](mailto:jseade@matcuer.unam.mx)

Correo electrónico de los secretarios de redacción:  
[llorente@agt.uva.es](mailto:llorente@agt.uva.es), [llopez@agt.uva.es](mailto:llopez@agt.uva.es)

# Matrices de Zorn sobre $\mathbb{Z}$ e subloops de índice finito

C. R. Giraldo Vergara

## Resumo

A Álgebra de Zorn  $\mathfrak{Z}(\mathbb{Q})$ , é a representação matricial da álgebra de Cayley-Dickson racional que se decompõe, esta álgebra possui uma função multiplicativa chamada determinante que tem propriedades similares ao determinante usual. O conjunto de elementos de  $\mathfrak{Z}(\mathbb{Z}) \subset \mathfrak{Z}(\mathbb{Q})$  com determinante igual a 1 é um loop de Moufang que denotaremos por  $SLL(2, \mathbb{Z})$ . Para dito loop apresentaremos subloops de índice finito em  $SLL(2, \mathbb{Z})$  que não são subloops de congruência.

The Zorn's Algebra  $\mathfrak{Z}(\mathbb{Q})$ , is the matricial representation of the split Cayley-Dickson rational algebra, this algebra has a multiplicative function called determinant with properties similar to the usual one. The set of elements in  $\mathfrak{Z}(\mathbb{Z}) \subset \mathfrak{Z}(\mathbb{Q})$  with determinant 1 is a Moufang loop that we will denote by  $SLL(2, \mathbb{Z})$ . In our main result we present subloops of finite index in  $SLL(2, \mathbb{Z})$ , that are not congruence subloops.

## 1 Introdução

Sejam  $R$  um anel comutativo com unidade,  $I$  um ideal de  $R$  e  $SL(n, R)$  o grupo especial linear das matrizes  $n$  por  $n$  sobre  $R$ . O grupo de congruência principal de nível  $I$  em  $SL(n, R)$  é o conjunto das matrizes congruentes à identidade módulo o ideal  $I$ . Dizemos que  $SL(n, R)$  satisfaz a propriedade dos subgrupos de congruência se todo seu subgrupo de índice finito contém um subgrupo de congruência principal.

Nas últimas décadas os grupos de congruências assumiram importância própria, além da tradicional aplicação no campo geométrico referente ao problema de classificação de curvas elípticas sobre  $\mathbb{C}$  e ao estudo de formas modulares. Esta nova importância é devido os trabalhos de Mennicke, Serre, Lazard, Bass, Vaserstein, Newman entre outros. Mennicke [Men] provou que  $SL(n, \mathbb{Z})$  com  $n \geq 3$  satisfaz a propriedade de subgrupos de congruência, enquanto que Bass, Milnor, Serre [BMS] provaram que  $SL(n, R)$  satisfaz tal propriedade para  $n \geq 3$

em uma variedade ampla de anéis (em particular para todo anel de números algébricos). Este resultado foi estendido por Serre [S] para  $SL(2, R)$  onde  $R$  é um anel de números algébricos que contém uma unidade de ordem infinita. Neste mesmo artigo, Serre mostra que se  $R$  é o anel de inteiros algébricos  $\mathcal{O}_d$  do corpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  com  $d \in \mathbb{N}^*$ , então os grupos  $SL(2, \mathcal{O}_d)$  não possuem propriedade de grupos de congruência.

Por outro lado a Álgebra de Zorn  $\mathfrak{Z}(R)$ , que pode se ver como a representação matricial da álgebra de Cayley-Dickson que se decompõe, contém loops de Moufang análogos aos grupos  $GL(2, R)$  e  $SL(2, R)$  e de igual forma pode-se desenvolver nestes loops uma teoria análoga à teoria de grupos de congruência. Em [BG] mostramos que se  $R$  é um domínio de Dedekind de números algébricos que possui uma unidade de ordem infinito, então todo subloop de índice finito é de congruência. Nestas notas mostraremos que dita a condição de ter uma unidade de ordem infinito é necessária, em particular se mostrará que se o anel base é  $\mathbb{Z}$  então existem subloops de índice finito que não são de congruência.

## 2 Preliminares sobre grupos de congruências

Sejam  $R$  um anel comutativo com unidade 1. Denotemos por  $GL(n, R)$  o grupo de matrizes invertíveis de tamanho  $n \times n$  com coeficientes em  $R$  e por  $SL(n, R)$  o subgrupo de  $GL(n, R)$  de todas as matrizes de determinante 1. No que segue denotamos  $\Gamma = SL(n, R)$ . Uma classe particularmente importante de subgrupos de  $SL(n, R)$  são os chamados grupos de congruências: para todo  $m$  elemento não nulo de  $R$ , o *subgrupo de congruência principal* de  $\Gamma$  de nível  $m$  é o conjunto de todas as matrizes de  $\Gamma$  tais que

$$A \equiv I \pmod{m}$$

onde a congruência é feita componente a componente. Denotamos este subgrupo por  $\Gamma(m)$ . Um subgrupo  $G$  de  $\Gamma$  é dito de *congruência* se ele contém um grupo de congruência principal. Além disso, dizemos que  $SL(n, R)$  cumpre a propriedade do subgrupo de congruência (PSC) se todo subgrupo  $G$  de  $SL(n, R)$  de índice finito é um grupo de congruência.

Mennicke [Men] provou que  $SL(n, \mathbb{Z})$  com  $n \geq 3$  cumpre PSC, enquanto que Bass, Milnor, Serre [BMS] provaram que  $SL(n, R)$  satisfaz PSC para  $n \geq 3$  em uma variedade ampla de anéis (em particular para todo anel de números algébricos). Este resultado foi estendido por Serre [S] para  $SL(2, R)$  onde  $R$  é um anel de números algébricos que contém uma unidade de ordem infinita. Neste mesmo artigo, Serre mostra que se  $R$  é o anel de inteiros algébricos  $\mathcal{O}_d$  do corpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  com  $d \in \mathbb{N}^*$ , então os grupos  $SL(2, \mathcal{O}_d)$ , não possuem PSC.

No caso quando  $R = \mathbb{Z}$  e  $n = 2$ , i.e  $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ , é conhecido que  $SL(2, \mathbb{Z})$

é gerado pelas matrizes

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

De igual forma  $SL(2, \mathbb{Z})$  é gerado pelas matrizes  $T$  e  $U = TS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Observemos que

$$T^2 = -I, \quad U^3 = I,$$

e assim o grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$  é o produto livre de um grupo cíclico de ordem 2 e um grupo cíclico de ordem 3 (ver [N1]).

Seja  $G$  um subgrupo de índice finito  $i$  de  $\Gamma$ . Como para todo  $A \in \Gamma$  se cumpre que  $A^{i!} \in G$ , temos que uma condição necessária para que  $G$  seja de índice finito é que exista um inteiro  $e$  tal que  $G \supset \Gamma^e$ , onde  $\Gamma^e$  denota o subgrupo de  $\Gamma$  gerado pelas  $e$ -ésimas potências. Esta condição de fato, não é suficiente, a prova é baseada nos resultados negativos do problema de Burnside feitas por Novikov e Adian para  $n$  ímpar maior que 667 (ver [NA]) e Ivanov para  $n$  par suficientemente grande (ver [I]). Em particular, tais resultados implicam que o índice de  $\Gamma^{6n}$  sobre  $\Gamma$  é infinito para  $n$  suficientemente grande ( $n > 2^{13}$ ). Newman [N2] caracterizou totalmente o caso em que  $n$  não divisível por 6.

Dado que todo grupo de congruência principal é de índice finito, uma condição suficiente para que  $G \subset \Gamma$  seja de índice finito é que seja um grupo de congruência. Porém esta condição não é necessária. Para construir um grupo de índice finito que não é de congruência, consideremos primeiro o grupo  $\Gamma(2)$  que pelo teorema dos subgrupos de Kuroš (Ver [R] pág. 167) temos que  $\Gamma(2)$  é grupo livre, além disso, como consequência do teorema de Nielsen-Schreier (Ver [N1] pág. 144),  $\Gamma(2)$  possui  $1 + \frac{6}{6} = 2$  geradores que são

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

e consideremos  $\Gamma_n(2)$  o subgrupo de  $\Gamma(2)$  consistindo de todas as palavras  $W$  de  $\Gamma(2)$  para as quais

$$\#(W, A) \equiv \#(W, B) \equiv 0 \pmod{n},$$

onde  $\#(W, A)$  denota a soma dos coeficientes de  $A$  na representação de  $W$ . Afirmamos que se  $n$  não é uma potência de 2, então  $\Gamma_n(2)$  não é um grupo de congruência. De fato, observemos que

- $\Gamma_n(2)$  é um subgrupo normal de  $\Gamma$ , já que  $\#(CWC^{-1}, A) \equiv \#(W, A) \equiv 0 \pmod{n}$  e  $\#(CWC^{-1}, B) \equiv \#(W, B) \equiv 0 \pmod{n}$ , para todo  $C \in \Gamma$  e  $W \in \Gamma_n(2)$ .

- Do fato que  $\#(W, A) \equiv \#(W, B) = 0$  para todo  $W \in \Gamma'(2)$ , segue que  $\Gamma'(2) \subset \Gamma_n(2)$  e portanto  $\frac{\Gamma(2)}{\Gamma_n(2)}$  é abeliano.
- $\frac{\Gamma(2)}{\Gamma_n(2)} = \{[A^i B^j] \mid 0 \leq i, j \leq n-1\}$ , logo  $\Gamma_n(2)$  é de índice  $n^2$  em  $\Gamma(2)$ .
- Como  $S^{2n}$  é a menor potência de  $S$  que está contida em  $\Gamma_n(2)$ , então o nível de  $\Gamma_n(2)$  é  $2n$ .

Assim  $\Gamma_n(2)$  é um grupo de congruência, se e só se, contém  $\Gamma(2n)$ .

Como  $|\frac{\Gamma}{\Gamma_n(2)}| = 6n^2$ , temos que, uma condição necessária para que  $\Gamma_n(2)$  seja de congruência é que  $6n^2 \mid \mu(2n)$  onde  $\mu(2n) = |\frac{\Gamma}{\Gamma(2n)}|$ . Suponhamos que  $\Gamma_n(2)$  é um grupo de congruência e seja  $p$  qualquer primo dividindo  $n$ . Então  $\Gamma_p(2)$  também é de congruência pois  $\Gamma_p(2) \supset \Gamma_n(2)$ , e em particular se cumpre  $6p^2 \mid \mu(2p)$ . Se  $p$  é ímpar, é fácil comprovar que  $\mu(2p) = 3p(p^2 - 1)$  (ver [N1] Pag. 150), logo temos que  $2p \mid p^2 - 1$  o qual é impossível.

### 3 Matrizes de Zorn

Seja  $R$  um anel comutativo e associativo com unidade, denotamos por  $R^3$  o espaço vetorial das triplas ordenadas sobre  $R$ . A álgebra de Zorn sobre  $R$ , denotada por  $\mathfrak{Z}(R)$ , consiste do conjunto de matrizes  $2 \times 2$  da forma

$$\begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \quad a, b \in R \quad x, y \in R^3,$$

dotado das operações soma e multiplicação, onde a soma de matrizes  $2 \times 2$  é componente a componente e a multiplicação é dada por

$$\begin{bmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 + x_1 \cdot y_2 & a_1 x_2 + b_2 x_1 - y_1 \times y_2 \\ a_2 y_1 + b_1 y_2 + x_1 \times x_2 & b_1 b_2 + y_1 \cdot x_2 \end{bmatrix}$$

onde  $\cdot$  e  $\times$  denotam o produto escalar e o produto vetorial em  $R^3$ .

No caso de  $R$  ser um corpo, a álgebra de Zorn é precisamente a representação matricial da álgebra de Cayley-Dickson  $(F, -1, -1, 1)$  (ver [GJM] pág. 21).

A função determinante  $\det : \mathfrak{Z}(R) \rightarrow R$  definida por  $\det \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} = ab - x \cdot y$  é multiplicativa. Assim, um elemento  $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$   $a, b \in R, x, y \in R^3$  de  $\mathfrak{Z}(R)$  é invertível se e só se,  $\det(A) \in R^*$  e portanto  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} b & -x \\ -y & a \end{bmatrix}$ .

A álgebra de Zorn é alternativa e, portanto, o conjunto de elementos invertíveis é um loop de Moufang, isto é, um loop que satisfaz alguma das identidades equivalentes:

1.  $((xy)x)z = x(y(xz))$  identidade de Moufang à esquerda.
2.  $((xy)z)y = x(y(zy))$  identidade de Moufang à direita.
3.  $(xy)(zx) = (x(yz))x$  identidade de Moufang media.

Chamamos este conjunto de loop linear geral e o denotamos por  $\text{GLL}(2, R)$ , i.e.

$$\text{GLL}(2, R) = \{A \in \mathfrak{Z}(R) \mid \det(A) \in R^*\}.$$

Continuando a analogia com  $GL(2, R)$  definimos o loop especial linear denotado por  $\text{SLL}(2, R)$ , como

$$\text{SLL}(2, R) = \{A \in \text{GLL}(2, R) \mid \det A = 1\}.$$

Uma exposição mais detalhada da teoria de álgebras alternativas e loops de Moufang se encontra em [GJM] ou [ZSSS].

No que segue denotamos por

- $\mathbb{I}$  o loop  $\text{SLL}(2, \mathbb{Z})$ .
- $\mathbb{I}'$  o subloop de  $\mathbb{I}$  gerado pelos comutadores e associadores, isto é, o menor subloop que contém os elementos da forma

$$[A, B] = ABA^{-1}B^{-1} \quad \text{e} \quad [A, B, C] = ((AB)C)(A(BC))^{-1},$$

com  $A, B$  e  $C \in \mathbb{I}$ .

- $\mathbb{I}^m$  o subloop de  $\mathbb{I}$  gerado pelas  $m$ -ésimas potências de elementos de  $\mathbb{I}$ .
- Para cada  $j = 1, 2, 3$ ,

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & e_j \\ -e_j & 0 \end{bmatrix} \quad S_j = \begin{bmatrix} 1 & e_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U_j = \begin{bmatrix} 0 & e_j \\ -e_j & -1 \end{bmatrix}$$

e  $\mathbb{I}_{(j)}$  é o subloop

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & be_j \\ ce_j & d \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \right\}$$

onde  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  e  $e_3 = (0, 0, 1)$ .

**Observação 3.1** Para cada  $j = 1, 2, 3$ , temos que

$$\mathbb{I}_{(j)} \cong SL(2, \mathbb{Z}).$$

Em particular,  $\mathbb{I}_{(j)}$  é gerado por duas das matrizes  $T_j$ ,  $S_j$  e  $U_j$ .

Algumas das propriedades dos geradores de  $\mathbb{I}_{(j)}$ , e que serão usadas no que segue, são as seguintes:  $T_j^2 = -I$ ,  $U_j^3 = I$ ,  $U_j = T_j S_j$ ,  $S_j^n = \begin{bmatrix} 1 & ne_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $(S_j^t)^{-1} = T_j^{-1} S_j T_j$ , onde  $S_j^t$  denota a matriz transposta de  $S_j$ .

Algumas propriedades que serão usada ao longo do trabalho são

1.  $T_j T_{j+1} = T_{j+2}^{-1}$ .
2. Se  $u \perp v$  então  $\begin{bmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u \\ v & 1 \end{bmatrix}$ . Reciprocamente se  $\begin{bmatrix} 1 & u \\ v & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{I}$  então  $u \perp v$ . Em particular as matrizes comutam.
3.  $[S_j, S_{j+1}] = S_j S_{j+1} S_j^{-1} S_{j+1}^{-1} = (S_{j+2}^2)^t$ . Observemos que não importa a ordem em que realizamos o produto, por ser  $\mathbb{I}$  de Moufang e portanto dissociativo, isto é, o subloop gerado por dois elementos é um grupo.
4.  $S_i^p ((S_j^t)^m S_k^n) = \begin{bmatrix} 1 & pe_i + ne_k \\ (m + pn)e_j & 1 \end{bmatrix}$  onde  $e_i \times e_k = e_j$ .

Define-se o *subloop de congruência principal* de  $\mathbb{I}$  de nível  $n$  como o conjunto de todas as matrizes  $A$  de  $\mathbb{I}$  tais que

$$A \equiv I \pmod{n},$$

onde a congruência é componente a componente. Denotamos este loop por  $\mathbb{I}(n)$ . Em particular, no caso  $n = 1$  teremos que  $\mathbb{I}(1) = \mathbb{I}$ . Um subloop de  $\mathbb{I}$  é dito de *congruência* se contém um subloop de congruência principal  $\mathbb{I}(n)$ .

**Proposição 3.2** Seja  $p$  número primo e  $k \in \mathbb{N}$ . Então  $\mathbb{I}(p^k)$  é um subloop normal de  $\mathbb{I}$  de índice  $p^{7k} \left(1 - \frac{1}{p^4}\right)$ .

*Demonstração:* Consideremos o homomorfismo sobrejetivo de loops

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{I} &\longrightarrow \text{SLL}(2, \mathbb{Z}_{p^k}) \\ A &\longmapsto A \pmod{p^k} \end{aligned}$$



É fácil comprovar que  $\ker(\Theta) = \mathbb{I}(p^k)$  logo

$$[\mathbb{I} : \mathbb{I}(p^k)] = \text{número de elementos de } \text{SLL}(2, \mathbb{Z}_{p^k}).$$

Para contar os elementos de  $\text{SLL}(2, \mathbb{Z}_p^k)$  consideremos um elemento arbitrário

$$A = \begin{bmatrix} a & (u_1, u_2, u_3) \\ (v_1, v_2, v_3) & b \end{bmatrix}, \text{ tal que}$$

$$\det A = ab - v_1u_1 - v_2u_2 - v_3u_3 \equiv 1 \pmod{p^k}.$$

Assim  $(a, v_1, v_2, v_3)$  pode tomar qualquer valor diferente de  $p(n_1, n_2, n_3, n_4)$  i.e. este vetor pode tomar  $p^{4k} - p^{4(k-1)}$  possíveis valores. Fixando este vetor, temos que, pelo menos uma das coordenadas, não é divisível por  $p$ . Sem perda de generalidade vamos supor que  $a$  não é divisível por  $p$  (No caso  $a$  divisível por  $p$  teremos que algum  $v_j$  é não divisível por  $p$  e o argumento segue de maneira similar). Logo ao fixar os valores de  $u_1, u_2, u_3$  teremos que a congruência

$$ab \equiv 1 + v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 \pmod{p^k}$$

possui exatamente uma solução na variável  $b$  módulo  $p^k$ . Assim os valores de  $u_1, u_2, u_3$  determinam de forma única o valor de  $b$  módulo  $p^k$  e portanto o vetor  $(b, u_1, u_2, u_3)$  pode tomar  $p^{3k}$  possíveis valores.  $\square$

Observemos que  $\mathbb{I}(p^k)$  pode ser visto como o núcleo de uma aplicação entre loops. Generalizando a idéia que um subgrupo é normal se e só se é núcleo de um homomorfismo de grupos, podemos definir subloop normal, a partir das propriedades do núcleo de um homomorfismo entre loops, i.e, um subloop  $\mathcal{H}$  de um loop  $\mathcal{L}$  é normal se, para todo  $x, y \in \mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{H}x = x\mathcal{H}, \quad (\mathcal{H}x)y = \mathcal{H}(xy), \quad (x\mathcal{H})y = x(\mathcal{H}y) \quad \text{e} \quad y(x\mathcal{H}) = (yx)\mathcal{H}.$$

**Teorema 3.3**  $\mathbb{I}(n)$  é subloop normal de  $\mathbb{I}$  de índice

$$n^7 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^4}\right).$$

*Demonstração:* Suponhamos que  $n = p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l}$ . Consideremos o homomorfismo sobrejetivo de loops

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{I} &\longrightarrow \prod_{j=1}^l \text{SLL}(2, \mathbb{Z}_{p_j^{k_j}}) \\ A &\longmapsto \prod_{j=1}^l A \pmod{p_j^{k_j}} \end{aligned}$$

É fácil comprovar que  $\ker(\Theta) = \mathbb{I}(n)$  logo  $\mathbb{I}(n)$  é um subloop normal, além disso

$$[\mathbb{I} : \mathbb{I}(n)] = \text{número de elementos de } \prod_{j=1}^l \text{SLL}(2, \mathbb{Z}_{p_j^{k_j}}).$$

O resultado segue da proposição anterior.  $\square$

No que segue, para  $n \in \mathbb{Z}^*$  e  $j = 1, 2, 3$  denotamos por  $A_{jn}$  e  $B_{jn}$  as matrizes  $\begin{bmatrix} 1 & ne_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ne_j & 1 \end{bmatrix}$  respectivamente e  $\Delta(n)$  denota o fecho normal em  $\mathbb{F}$  do conjunto das matrizes de forma  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ny & 1 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}^3 \right\}$ , i.e, o menor subloop normal de  $\mathbb{F}$  que contém este conjunto.

**Definição 3.4** *Seja  $\mathcal{L}$  um subloop de  $\mathbb{F}$ , e suponhamos que o conjunto  $S = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \Delta(n) \subset \mathcal{L}\}$  é não vazio. Definimos o nível de  $\mathcal{L}$  como o menor inteiro contido em  $S$ .*

**Lema 3.5** *Seja  $\mathcal{L}$  um subloop de  $\mathbb{F}$ , e  $n$  e  $m$  inteiros tais que  $\Delta(n) \subset \mathcal{L}$  e  $\Delta(m) \subset \mathcal{L}$ . Se  $d = (m, n)$ , então  $\Delta(d) \subset \mathcal{L}$ .*

*Demonstração:* Como  $d = tn + sm$  onde  $t, s \in \mathbb{Z}$ , então o lema segue do fato que

$$\begin{bmatrix} 1 & dx \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & mx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^s \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ dx & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ nx & 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ mx & 1 \end{bmatrix}^s$$

para todo  $x \in \mathbb{Z}^3$ .  $\square$

**Lema 3.6** *Sejam  $n \geq 1$  e  $A = \begin{bmatrix} 1 & n(v_1, v_2, v_3) \\ n(u_1, u_2, u_3) & b \end{bmatrix} \in \mathbb{F}(n)$ . Então  $A$  pode ser escrita como produto das matrizes  $A_{jn}$  e  $B_{jn}$   $j = 1, 2, 3$ . Em particular  $A \in \Delta(n)$ .*

*Demonstração:* Notemos que se  $A$  é da forma  $\begin{bmatrix} 1 & (0, 0, 0) \\ n(u_1, u_2, u_3) & 1 \end{bmatrix}$  então pode-se escrever como produto das matrizes  $A_{jn}$  e  $B_{jn}$   $j = 1, 2, 3$ . De fato, definamos  $B = \begin{bmatrix} 1 & (0, 0, 0) \\ n(0, u_2, u_3) & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}(n)$ , assim

$$\begin{aligned} A &= B + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ nu_1 e_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= B \left( I + B^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ nu_1 e_1 & 0 \end{bmatrix} \right) = B \begin{bmatrix} 1 & n^2(0, u_1 u_3, -u_1 u_2) \\ (nu_1, 0, 0) & 1 \end{bmatrix} \\ &= B \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (nu_1, 0, 0) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n^2(0, u_1 u_3, -u_1 u_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= B((B_{1n})^{u_1} (A_{2n}^{nu_1 u_3} ((B_{1n})^{n^3 u_1^2 u_2 u_3} A_{3n}^{-nu_1 u_2}))) \end{aligned}$$

fazendo o mesmo procedimento para  $B$ , obtemos que  $B = B_{3n}^{u_3}(A_{1n}^{-nu_2u_3}B_{2n}^{u_2})$ . Logo,  $A$  é gerado pelas matrizes desejadas.

Em geral se  $A = \begin{bmatrix} 1 & n(v_1, v_2, v_3) \\ n(u_1, u_2, u_3) & b \end{bmatrix}$ , temos  $A = (((CA_{3n}^{v_3})A_{2n}^{v_2})A_{1n}^{v_1})$  onde

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 1 & (0, 0, 0) \\ (nu_1 + n^2v_3v_2, nu_2 - n^2v_3v_1, nu_3 + n^2v_2v_1) & b - n^2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & (0, 0, 0) \\ (nu_1 + n^2v_3v_2, nu_2 - n^2v_3v_1, nu_3 + n^2v_2v_1) & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e como mostramos na primeira parte,  $C$  é gerado pelas matrizes  $A_{jn}$  e  $B_{jn}$   $j = 1, 2, 3$ , assim  $A$  pode ser escrita como produto das matrizes  $A_{jn}$  e  $B_{jn}$   $j = 1, 2, 3$ .  $\square$

No que segue,  $\mathbb{I}_{(j)}(n)$  denota o subloop  $\mathbb{I}_{(j)} \cap \mathbb{I}(n)$ , isto é,

$$\mathbb{I}_{(j)}(n) := \left\{ \begin{bmatrix} a & be_j \\ ce_j & d \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{I}(n) \right\}.$$

**Teorema 3.7** Para todo  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{I}(n) = \langle \mathbb{I}_{(1)}(n), \mathbb{I}_{(2)}(n), \mathbb{I}_{(3)}(n) \rangle$ .

*Demonstração:* Seja  $\mathcal{L} = \langle \mathbb{I}_{(1)}(n), \mathbb{I}_{(2)}(n), \mathbb{I}_{(3)}(n) \rangle$ . Claramente se tem que  $\mathcal{L} \subset \mathbb{I}(n)$ , assim, basta mostrar que  $\mathbb{I}(n) \subset \mathcal{L}$ . Seja  $A \in \mathbb{I}(n)$ , logo  $A$  é uma matriz da forma  $\begin{bmatrix} a & n(u_1, u_2, u_3) \\ n(v_1, v_2, v_3) & b \end{bmatrix}$  com  $ab - n^2(v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3) = 1$  e  $a$  e  $b$  congruentes com 1 módulo  $n$ , em particular se  $n > 1$  então  $a \neq 0$ . No caso  $n = 1$  e  $a = 0$ , como  $(v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3) = 1$ , existe  $j$  tal que  $v_ju_j \neq 0$ , assim é suficiente mostrar que a matriz

$$T_j A = \begin{bmatrix} e_j \cdot u & be_j + e_j \times u \\ e_j \times v & -e_j \cdot v \end{bmatrix}$$

está em  $\mathcal{L}$ . Logo também podemos supor  $a \neq 0$ .

Como  $(-n^2v_1)u_1 + (-n^2v_2)v_2 + (-n^2v_3)v_3 \equiv 1 \pmod{a}$ , então  $(u_1, v_2, v_3)$  é unimodular em  $\mathbb{Z}_a^3$  (ver [BLS]), existem  $t$  e  $s$  tais que  $u_1 + v_2t + v_3s = u'_1$  é inversível em  $\mathbb{Z}_a$  e portanto  $a$  e  $u'_1$  são primos relativos. Definimos

$$u'_2 = -v_1t + u_2 \quad \text{e} \quad u'_3 = -v_1s + u_3,$$

segue que  $B = \begin{bmatrix} a & n(u'_1, u'_2, u'_3) \\ n(v_1, v_2, v_3) & b \end{bmatrix} \in \mathbb{I}(n)$  e

$$A = B \begin{bmatrix} 1 & nb(u_1 - u'_1, u_2 - u'_2, u_3 - u'_3) \\ -n^2(u'_2u_3 - u'_3u_2, u'_3u_1 - u'_1u_3, u'_1u_2 - u'_2u_1) & 1 \end{bmatrix}$$

pelo lema 3.6 temos que mostrar que  $B \in \mathcal{L}$ . Como  $(a, n^2u'_1) = 1$  então existem  $x, y$  números inteiros tais que  $ax + n^2u'_1y = 1$ . Como  $a \equiv 1 \pmod{n}$  então  $x \equiv 1 \pmod{n}$ , logo  $B_1 = \begin{bmatrix} a & (nu'_1, 0, 0) \\ (-ny, 0, 0) & x \end{bmatrix} \in \mathbb{I}\Gamma_{(1)}(n)$ , assim

$$B = \begin{bmatrix} 1 & n(0, au'_2 - nv_3y, au'_3 + nv_2y) \\ n(xv_1 + by, xv_2 - nu'_3u'_1, xv_3 + nu'_2u'_1) & ba - n^2v_1u'_1 \end{bmatrix} B_1.$$

Assim pelo lema 3.6 temos que  $B \in \mathcal{L}$ , o que conclui a prova.  $\square$

**Corolário 3.8**  $\mathbb{I}\Gamma(n)$  é finitamente gerado, em particular,  $\mathbb{I}\Gamma(2)$  é gerado pelas matrizes  $\begin{bmatrix} 1 & 2e_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2e_j & 1 \end{bmatrix}$  com  $j = 1, 2, 3$ .

*Demonstração:* Isto é uma consequência imediata de que  $\mathbb{I}\Gamma_{(j)}(n)$  são grupos finitamente gerados.  $\square$

Observemos que  $\mathbb{I}\Gamma$  é gerado pelas matrizes  $S_j$  e  $T_j$   $j = 1, 2, 3$  mas  $\mathbb{I}\Gamma$  não é gerado livremente por  $S_j, T_j$   $j = 1, 2, 3$ . De fato se tem que  $T_1 = T_3T_2$  e  $S_1^2 = T_1[S_3, S_2]T_1^{-1}$ .

O seguinte teorema é a generalização do teorema de Wohlfahrt para  $\mathbb{I}\Gamma$ .

**Teorema 3.9** *Sejam  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Então  $\mathbb{I}\Gamma(n) \subseteq \Delta(n)\mathbb{I}\Gamma(m)$ .*

*Demonstração:* A seguinte prova é similar à prova do teorema de Wohlfahrt para anéis de Dedekind feita por Mason e Stothers (ver [MS]).

Seja  $A = \begin{bmatrix} a & n(v_1, v_2, v_3) \\ n(u_1, u_2, u_3) & b \end{bmatrix} \in \mathbb{I}\Gamma(n)$ , temos que mostrar que existe uma matriz  $B \in \Delta(n)$  tal que  $A \equiv B \pmod{m}$ , e portanto  $A = B(B^{-1}A)$  onde  $B^{-1}A \in \mathbb{I}\Gamma(m)$ .

*Caso 1:* Se  $a \equiv 1 \pmod{m}$ , então basta tomar

$$B = \begin{bmatrix} 1 & n(v_1, v_2, v_3) \\ n(u_1, u_2, u_3) & ab \end{bmatrix},$$

pois o lema 3.6 nos garante que  $B \in \Delta(n)$ , além disso

$$\begin{aligned} B^{-1}A &= \begin{bmatrix} a^2b - n^2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) & n(ab - b)(v_1, v_2, v_3) \\ n(1 - a)(u_1, u_2, u_3) & b - n^2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \end{bmatrix} \\ &= I + (a - 1) \begin{bmatrix} ab & nb(v_1, v_2, v_3) \\ -n(u_1, u_2, u_3) & -b \end{bmatrix} \equiv I \pmod{m} \end{aligned}$$

logo  $A \in \Delta(n)\mathbb{I}\Gamma(m)$ .

*Caso 2:* Se  $(a, m) = 1$ , então a congruência  $ax \equiv 1 \pmod{m}$  possui solução, digamos  $a'$ . Sejam  $c$  o máximo divisor comum de  $v_1, v_2$  e  $v_3$ ,  $v'_j = \frac{v_j}{c}$  para  $j = 1, 2, 3$  e  $X = \begin{bmatrix} 1 & a'(1-a-nc)(v'_1, v'_2, v'_3) \\ (0, 0, 0) & 1 \end{bmatrix}$ . Notemos que  $a'(1-a-nc)$  é múltiplo de  $n$  pois  $1-a$  é múltiplo de  $n$ , assim  $X \in \Delta(n)$ . Além disso,

$$AX \equiv \begin{bmatrix} a & (1-a)(v'_1, v'_2, v'_3) \\ n(u_1, u_2, u_3) & b + a'(\frac{1-a}{n} - c)(\frac{ab-1}{c}) \end{bmatrix} \pmod{m}.$$

Tomando  $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & (0, 0, 0) \\ (t_1, t_2, t_3) & 1 \end{bmatrix}$  onde  $v'_1 t_1 + v'_2 t_2 + v'_3 t_3 = 1$ , temos que

$$T_1^{-1}(AX)T_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 & * \\ * & * \end{bmatrix} \pmod{m},$$

logo, pelo *caso 1* temos que existe  $B \in \Delta(n)$  tal que  $T_1^{-1}(AX)T_1 \equiv B \pmod{m}$ , assim  $A \equiv (T_1 B T_1^{-1})X \pmod{m}$ , com  $(T_1 B T_1^{-1})X \in \Delta(n)$ , o que conclui o caso 2.

*Caso 3:* Em geral, seja  $d = n^2(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)$ , como  $ab - d = 1$  temos que  $(a, d)$  visto como elemento de  $\mathbb{Z}_m^2$  é unimodular, portanto existe  $t$  tal que  $a - td$  seja invertível em  $\mathbb{Z}_m$ , ou equivalentemente, primo relativo com  $m$ . Se

$$T = \begin{bmatrix} 1 & (0, 0, 0) \\ -nt(u_1, u_2, u_3) & 1 \end{bmatrix}, \text{ então}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} a - td & n(v_1, v_2, v_3) \\ -n(-at - 1 + bt + t^2 d)(u_1, u_2, u_3) & b + td \end{bmatrix},$$

onde  $(a + td, m) = 1$ , e pelo *caso 2*, existe  $B \in \Delta(n)$  tal que  $T^{-1}AT \equiv B \pmod{m}$ , e portanto  $A \equiv TBT^{-1} \pmod{m}$ , com  $TBT^{-1} \in \Delta(n)$ .  $\square$

**Corolário 3.10** *Seja  $\mathcal{L}$  um subloop de congruência de  $\mathbb{F}$  de nível  $n$ . Então  $\mathcal{L} \supset \mathbb{F}(n)$ .*

*Demonstração:* Como  $\mathcal{L}$  é de congruência, então existe um inteiro  $m$  tal que  $\mathbb{F}(m) \subset \mathcal{L}$ , além disso  $\Delta(n) \subset \mathcal{L}$ , logo  $\mathbb{F}(n) \subset \Delta(n)\mathbb{F}(m) \subset \mathcal{L}$ .  $\square$

Notemos que na prova do teorema 3.7 geramos  $\mathbb{F}(n)$  só com os geradores de  $\mathbb{F}_{(1)}(n)$  e as matrizes  $A_{2n}$ ,  $A_{3n}$ ,  $B_{2n}$  e  $B_{3n}$ . Desta observação podemos concluir o seguinte corolário.

**Corolário 3.11** *Seja  $\mathcal{L}$  subloop de  $\mathbb{F}$  de nível  $n$  tal que  $\mathcal{L} \supset \mathbb{F}_{(j)}(m)$ , para algum  $j = 1, 2, 3$  e para algum  $m \in \mathbb{N}^*$ . Então  $\mathcal{L}$  é um subloop de congruência que contém  $\mathbb{F}(n)$ .*

*Demonstração:* Como  $\mathcal{L} \supset \mathbb{I}_{(j)}(m) \supset \mathbb{I}_{(j)}(mn)$  e  $A_{2nm}, A_{3nm}, B_{2nm}, B_{3nm}$  estão contidos em  $\Delta(n) \subset \mathcal{L}$ , pela observação anterior temos que  $\mathcal{L} \supset \mathbb{I}(mn)$ , e portanto  $\mathcal{L}$  é de congruência, daqui o resultado segue do corolário 3.10.  $\square$

Seja  $\mathcal{L}$  um loop.  $\mathcal{L}'$  denota o subloop gerado pelos comutadores e associadores de  $\mathcal{L}$ . É conhecido que  $\mathcal{L}'$  é um subloop normal de  $\mathcal{L}$  (ver [GJM] pág. 56).

**Teorema 3.12**  $\mathbb{I} = \mathbb{I}'$ .

*Demonstração:* Dado que  $A_{j2}, B_{j2}$  estão contidos em  $\mathbb{I}'$  (ver pag. 15), pelo corolário 3.8 temos que  $\mathbb{I}(2) \subset \mathbb{I}'$ . Sabemos que  $\mathbb{I}(2)$  é um subloop normal tal que  $\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}(2)} \simeq SLL(2, \mathbb{Z}_2)$ , assim

$$\frac{\mathbb{I}'}{\mathbb{I}(2)} = \left( \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}(2)} \right)' \simeq (SLL(2, \mathbb{Z}_2))',$$

logo é suficiente mostrar que  $(SLL(2, \mathbb{Z}_2))' = SLL(2, \mathbb{Z}_2)$ , i.e. basta mostrar que  $U_j, T_j \in SLL(2, \mathbb{Z}_2)'$  para  $j = 1, 2, 3$ .

Sejam

$$M = \begin{bmatrix} 0 & u \\ v & 1 \end{bmatrix} \in SLL(2, \mathbb{Z}_2) \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{bmatrix} \in SLL(2, \mathbb{Z}_2).$$

Observemos que  $M^3 = I$ ,  $N^2 = I$  e  $(NM)^2 = I$ , logo

$$[N, M] = NMN^{-1}M^{-1} = NMNM^2 = (NM)^2M = M.$$

Segue que  $M \in (SLL(2, \mathbb{Z}_2))'$ , em particular  $U_j \in (SLL(2, \mathbb{Z}_2))'$  para  $j = 1, 2, 3$ , além disso da identidade

$$\begin{bmatrix} 0 & e_j + e_{j+1} \\ e_j + e_{j+2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e_{j+1} + e_{j+2} \\ e_j + e_{j+1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e_{j+2} \\ e_{j+2} & 0 \end{bmatrix},$$

temos que  $T_j \in (SLL(2, \mathbb{Z}_2))'$ , para  $j = 1, 2, 3$ .  $\square$

**Lema 3.13** *Suponhamos que  $\mathcal{L}$  é um loop livre gerado por  $R_1, \dots, R_l$ . Então*

$$\mathcal{L}' = \{W \in \mathcal{L} \mid \#(W, R_j) = 0, \text{ para } j = 1, \dots, l\},$$

onde  $\#(W, R_j)$  denota a soma dos expoentes de  $R_j$  na representação de  $W$  em termo dos geradores.

*Demonstração:* Seja  $\mathcal{H} = \{W \in \mathcal{L} \mid \#(W, R_j) = 0, \text{ para } j = 1, \dots, l\}$ . Como para todo  $A, B, C \in \mathcal{L}$  temos que  $\#([A, B], R_j) = 0$  e  $\#([A, B, C], R_j) = 0$ , segue

que  $\mathcal{L}' \subset \mathcal{H}$ . Para mostrar que  $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}'$ , basta observar que  $\mathcal{L}/\mathcal{L}'$  é um grupo comutativo, assim para todo  $W \in \mathcal{L}$  temos que

$$W \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}'} = R_1^{\alpha_1} \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}'} \cdots R_l^{\alpha_l} \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}'},$$

onde  $\alpha_j = \#(W, R_j)$ . Em particular, para  $W \in \mathcal{H}$  temos que  $W \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}'} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}'}$ , portanto  $W \in \mathcal{L}'$ .  $\square$

**Lema 3.14** *Para todo inteiro  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{I}'(n) \subset \mathbb{I}(n^2)$ , e  $\mathbb{I}(n)$  não é um loop livre.*

*Demonstração:* Sejam  $A, B \in \mathbb{I}(n)$ , i.e,  $A$  e  $B$  são matrizes invertíveis da forma  $A = I + nA'$  e  $B = I + nB'$ , assim

$$AB = I + nA' + nB' + n^2A'B' \quad \text{e} \quad BA = I + nA' + nB' + n^2B'A',$$

logo

$$AB \equiv I + nA' + nB' \equiv BA \pmod{n^2},$$

e portanto  $[A, B] \in \mathbb{I}(n^2)$ . De igual forma, como

$$A(BC) = I + n(A' + B' + C') + n^2(A'B' + A'C' + B'C') + n^3A'(B'C')$$

e

$$(AB)C = I + n(A' + B' + C') + n^2(A'B' + A'C' + B'C') + n^3(A'B')C',$$

temos que

$$A(BC) \equiv I + n(A' + B' + C') + n^2(A'B' + A'C' + B'C') \equiv (AB)C \pmod{n^3},$$

o que mostra que  $[A, B, C] \in \mathbb{I}(n^3) \subset \mathbb{I}(n^2)$ , assim,  $\mathbb{I}'(n) \subset \mathbb{I}(n^2)$ .

Suponhamos agora que  $\mathbb{I}(n)$  é livre, e sejam  $R_1, \dots, R_l$  o conjunto de geradores livres. Dado que  $A_{1n}^{2n} = [B_{2n}, B_{3n}] \in \mathbb{I}'(n)$ , pelo lema 3.13 temos que  $\#(A_{1n}^{2n}, R_j) = 0$  para todo  $j = 1, \dots, l$ . Mas  $\#(A_{1n}^{2n}, R_j) = 2n\#(A_{1n}, R_j) = 0$ , portanto  $A_{1n} \in \mathbb{I}'(n)$ , o que contradiz o fato que  $\mathbb{I}'(n) \subset \mathbb{I}(n^2)$ .  $\square$

**Lema 3.15** *Para todo  $n > 1$ ,  $\frac{\mathbb{I}(n)}{\mathbb{I}(n^2)} \cong (\mathbb{Z}_n^7, +)$ .*

*Demonstração:* Definamos a aplicação

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{I}(n) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_n^7, +) \\ I + n \begin{bmatrix} a & (u_1, u_2, u_3) \\ (v_1, v_2, v_3) & b \end{bmatrix} & \longmapsto & (a, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3) \pmod{n} \end{array}$$

Se  $A = I + nA_1$  e  $B = I + nB_1$ , então

$$AB = I + n(A_1 + B_1 + nA_1B_1) \quad \text{e} \quad A^{-1} = I - n(A_1 + \text{traço}(A_1)I),$$

onde  $\text{traço}(A_1) = n(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 - ab)$  é divisível por  $n$ , se comprova facilmente que  $\psi(AB) = \psi(A) + \psi(B)$  e  $\psi(A^{-1}) = -\psi(A)$ . Logo  $\psi$  define um homomorfismo de loops. Claramente  $\mathbb{I}(n^2) \subset \ker(\psi)$ . Para mostrar que  $\mathbb{I}(n^2) \supset \ker(\psi)$ , seja  $A = \begin{bmatrix} 1 + na & n(u_1, u_2, u_3) \\ n(v_1, v_2, v_3) & 1 + nb \end{bmatrix}$  no núcleo de  $\psi$ , logo  $a, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$  são divisíveis por  $n$ . Como  $\det(A) = (1 + na)(1 + nb) - n^2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = 1$ , então

$$1 = \det(A) \equiv (1 + na)(1 + nb) \equiv 1 + nb \pmod{n^2}$$

e portanto  $b$  tem que ser divisível por  $n$ , assim  $\ker(\psi) = \mathbb{I}(n^2)$ . Por outro lado, pelo teorema 3.3 temos que

$$[\mathbb{I}(n) : \mathbb{I}(n^2)] = \frac{[\mathbb{I} : \mathbb{I}(n^2)]}{[\mathbb{I} : \mathbb{I}(n)]} = n^7$$

Mas  $(\mathbb{Z}_n)^7$  tem  $n^7$  elementos, assim concluímos que  $\frac{\mathbb{I}(n)}{\mathbb{I}(n^2)} \cong (\mathbb{Z}_n^7, +)$ .  $\square$

**Proposição 3.16** *Para todo inteiro  $n \geq 2$ ,*

$$\mathbb{I}_{(1)}(n^2) \supset \langle A_{1n}, B_{1n} \rangle \cap \mathbb{I}'(n) \supset \langle A_{1n^2}^2, B_{1n^2}^2, [A, B] \mid A, B \in \langle A_{1n}, B_{1n} \rangle \rangle.$$

*Demonstração:* Denotamos por  $\mathcal{H} = \langle A_{1n}, B_{1n} \rangle \cap \mathbb{I}'(n)$ . Pelo lema 3.14 temos que

$$\mathcal{H} \subset \langle A_{1n}, B_{1n} \rangle \cap \mathbb{I}(n^2) = \mathbb{I}_{(1)}(n^2).$$

Como

$$[B_{3n}, B_{2n}] = A_{1n}^{2n} = A_{1n^2}^2, \quad [A_{2n}, A_{3n}] = B_{1n}^{2n} = B_{1n^2}^2,$$

segue que  $A_{1n^2}^2, B_{1n^2}^2 \in \mathbb{I}'(n)$  e portanto

$$\langle A_{1n^2}^2, B_{1n^2}^2, [A, B] \mid A, B \in \langle A_{1n}, B_{1n} \rangle \rangle \subset \mathcal{H}. \quad \square$$

Seja  $\mathbb{G}(n) = \frac{\mathbb{I}(n)}{\mathbb{I}'(n)}$ . Como  $\mathbb{I}(n)$  é finitamente gerado, então  $\mathbb{G}(n)$  é um grupo abeliano finitamente gerado.

**Lema 3.17** *Para  $n > 5$ ,  $\mathbb{G}(n)$  é infinito.*

*Demonstração:* Para cada  $A \in \mathbb{I}(n)$ , do teorema 3.7 sabemos que  $A = BC$  onde  $B \in \mathbb{I}_{(1)}(n)$  e  $C \in \Delta(n)$ . Seja  $\Theta : \mathbb{I}(n) \rightarrow \frac{\mathbb{I}_{(1)}(n)}{\Delta_{(1)}(n)}$  homomorfismo de



loops definido por  $\Theta(A) = B\Delta_{(1)}(n)$ . Para mostrar que  $\Theta$  está bem definido, suponhamos que  $A = B_1C_1 = B_2C_2$  onde  $B_1, B_2 \in \mathbb{I}_{(1)}(n)$  e  $C_1, C_2 \in \Delta(n)$ . Como  $\Delta(n)$  é normal então

$$B_1\Delta(n) = (B_1C_1)\Delta(n) = (B_2C_2)\Delta(n) = B_2\Delta(n),$$

assim  $B_1^{-1}B_2 \in \Delta(n) \cap \mathbb{I}_{(1)}(n) = \Delta_{(1)}(n)$ . Da mesma forma como  $\Delta(n)$  é normal, então  $\Theta$  é um homomorfismo de loops com núcleo  $\Delta(n)$ . Se segue que

$$\frac{\mathbb{I}(n)}{\Delta(n)} \simeq \frac{\mathbb{I}_{(1)}(n)}{\Delta_{(1)}(n)}.$$

Agora, pelo segundo e terceiro teorema do homomorfismo para loops, temos que

$$\frac{\frac{\mathbb{I}(n)}{\Delta(n)}}{\left(\frac{\mathbb{I}(n)}{\Delta(n)}\right)'} \simeq \frac{\frac{\mathbb{I}(n)}{\Delta(n)}}{\frac{\mathbb{I}'(n)}{\mathbb{I}'(n) \cap \Delta(n)}} \simeq \frac{\frac{\mathbb{I}(n)}{\Delta(n)}}{\frac{\mathbb{I}'(n)\Delta(n)}{\Delta(n)}} \simeq \frac{\mathbb{I}(n)}{\mathbb{I}'(n)\Delta(n)}.$$

Denotemos por  $C(n)$  o grupo  $\frac{\mathbb{I}_{(1)}(n)}{\Delta_{(1)}(n)}$ . Em [BLS] provam que o grupo de cohomologia profinita

$$H^1(\varprojlim C(n), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}\left(\frac{C(n)}{(C(n))'}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) = 0,$$

então  $\frac{C(n)}{(C(n))'}$  é um grupo abeliano livre de torsão para  $n \geq 1$ . Como  $C(n)$  é um grupo infinito para  $n > 5$  (ver [N1] pag 145), segue se que  $[C(n) : (C(n))']$  é infinito para  $n > 5$  e

$$|\mathbb{G}(n)| = [\mathbb{I}(n) : \mathbb{I}'(n)] \geq [\mathbb{I}(n) : \mathbb{I}'(n)\Delta(n)] = [C(n) : (C(n))'] = \infty \square$$

Seja  $\mathbb{G}_s(n)$  o subgrupo gerado pelas  $s$ -ésimas potências, i.e.  $\mathbb{G}_s(n) = \langle A^s | A \in \mathbb{G}(n) \rangle$ , assim  $\mathbb{G}(n)/\mathbb{G}_s(n)$  é finito, de fato  $[\mathbb{G}(n) : \mathbb{G}_s(n)] \leq s^k$  onde  $k$  é o número de geradores de  $\mathbb{G}(n)$ . Além disso  $\mathbb{G}_s(n)$  é normal em  $\mathbb{G}(n)$  pois  $BA^sB^{-1} = (BAB^{-1})^s$ . Assim os homomorfismos

$$\mathbb{I}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbb{G}(n) \xrightarrow{\psi} \frac{\mathbb{G}(n)}{\mathbb{G}_s(n)}$$

estão bem definidos e são sobrejetivos. Definimos  $\mathbb{I}(n, s) = \ker(\psi \circ \pi) = \pi^{-1}(\mathbb{G}_s(n))$ . Observemos que  $\mathbb{I}(n, s)$  é gerado pelos comutadores e associados e pelo conjunto  $\{A^s | A \in \mathbb{I}(n)\}$ .

**Teorema 3.18** *Seja  $n > 5$  e  $s \in \mathbb{N}$  ímpar tal que  $(n, s) = 1$ . Então  $\mathbb{I}(n, s)$  é um loop de índice finito sobre  $\mathbb{I}$  que não é um loop de congruência.*

*Demonstração:* Como

$$[\mathbb{I} : \mathbb{I}(n, s)] = [\mathbb{I} : \mathbb{I}(n)][\mathbb{I}(n) : \mathbb{I}(n, s)],$$

então pelo teorema 3.3, a definição de  $\mathbb{I}(n, s)$  e o teorema do homomorfismo temos que

$$[\mathbb{I} : \mathbb{I}(n)] = n^7 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^4}\right) \quad \text{e} \quad [\mathbb{I}(n) : \mathbb{I}(n, s)] = [\mathbb{G}(n) : \mathbb{G}_s(n)]$$

logo  $[\mathbb{I} : \mathbb{I}(n, s)]$  é finito.

Como  $\mathbb{G}(n)$  é um grupo abeliano infinito de torsão para  $n > 5$  então  $\mathbb{G}(n)$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}^t \times T$  para algum  $t \in \mathbb{N}^*$  e  $T$  subgrupo de torsão. Logo

$$[\mathbb{I}(n) : \mathbb{I}(n, s)] = [\mathbb{G}(n) : \mathbb{G}_s(n)] \geq s > 1,$$

para  $n > 5$ , em particular  $\mathbb{I}(n, s) \subsetneq \mathbb{I}(n)$ .

Agora suponhamos que  $\mathbb{I}(n, s)$  é de congruência, como  $A_{jn}^{2n}, B_{jn}^{2n} \in \mathbb{I}'(n)$  para  $j = 1, 2, 3$  então

$$\Delta(2n^2) \subset \mathbb{I}'(n) \subset \mathbb{I}(n, s).$$

De igual forma, pela definição de  $\mathbb{I}(n, s)$ , temos que  $A^s \in \mathbb{I}(n, s)$  para todo  $A \in \mathbb{I}(n)$ , em particular  $\begin{bmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^s, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ nx & 1 \end{bmatrix}^s \in \mathbb{I}(n, s)$  para todo  $x \in \mathbb{Z}^3$ , e portanto  $\Delta(ns) \subset \mathbb{I}(n, s)$ . Dado que  $(ns, 2n^2) = n$ , temos pelo lema 3.5 que  $\Delta(n) \subset \mathbb{I}(n, s)$ , e pelo corolário 3.10 segue que

$$\mathbb{I}(n) \subset \mathbb{I}(n, s) \subsetneq \mathbb{I}(n),$$

o que é uma contradição, assim concluímos que  $\mathbb{I}(n, s)$  não é de congruência.  $\square$

## Referências

- [BLS] H. Bass, M. Lazard e J.P Serre. *Sous-groupes d'indice fini dans  $SL(n, \mathbb{Z})$* . Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964) pag 385-392
- [BMS] H. Bass, J. Milnor e J.P. Serre. *Solution of the congruence group problem for  $SL_n$  ( $n \geq 3$ ) and  $Sp_{2n}$  ( $n \geq 2$ )*. Publ. Math. I.H.E.S. **33** (1967) pag 59-137
- [BG] F.E. Brochero Martinez e C.R. Giraldo Vergara. *Zorn's matrices and finite index subloops*. Comm. Algebra **33** (2005), no. 10, 3691–3698.
- [GJM] E. G. Goodaire, E. Jesper e C. P. Miles. *Alternative loop Rings*. North-Holland Math. Studies 184 (1996)

- [HR] L. Hua e I. Reiner. *On the generators of the symplectic modular group*. Trans. Amer. Math. Soc. **65**. pag 415-426 (1949)
- [I] S. Ivanov. *The free Burnside groups of sufficiently large exponents*. Intern. J. Algebra and computation 4, **1** (1994) pag 1-308
- [MS] A. W. Mason e W. W. Stothers. *On subgroups of  $GL(n, A)$  which are Generated by Commutators*. Inventiones Math. **23** (1974) pag 327-346
- [Mat] H. Matsamura. *Commutative ring theory*. Cambridge University press (1986)
- [Men] J.L. Mennicke. *Finite factor groups of the unimodular group*. Ann. of Math, **81** (1965) pag 31-37
- [N1] M. Newman. *Integral Matrices*. Academic Press, 1972
- [N2] M. Newman. *The structure of some subgroups of the modular group* Illinois J. Math. **6** (1962) pag 480-487
- [NA] P.S. Novikov e S.I. Adian. *On infinite periodic groups I, II*. Izvestia AN 'R 32 **1** (1968) pag 212-244 (I), pag 251-254 (II)
- [R] I. Reiner. *Normal Subgroups of the unimodular group*. Illinois J. Math. **2** (1958) pag 142-144
- [R] D. Robinson. *A course in the Theory of Groups*. G.T.M. **80**. Springer-Verlag (1980)
- [S] J.P. Serre. *Le problème des groupes de congruence pour  $SL_2$* . Ann of Math. (2) **92** (1970) pag 489-527.
- [ZSSS] K.A. Zhevlakov, A.M. Slin'ko, I.P. Shestakov e A.I. Shirshov. *Rings that are nearly associative*. Academic Press. (1982)

C. R. Giraldo Vergara  
Fac. de Filosofia, Ciências e Letras. UNIFEMM  
Sete Lagoas, MG. 35701-242 Brasil  
E-mail: [carmita@unisete.br](mailto:carmita@unisete.br)



# Espacios foliados definidos por grafos<sup>\*</sup>

Álvaro Lozano Rojo

## 1. Introducción

Una *laminación* es una generalización de una foliación: una partición de un espacio métrico compacto en  $p$ -variedades conexas, las *hojas*, que localmente se apilan como las hojas de un libro. En otras palabras, la descomposición localmente tiene una estructura de producto  $\mathbb{R}^p \times Z$ , donde  $Z$  es un abierto en un espacio métrico separable y localmente compacto dado, que *modela transversalmente* la laminación.

En [5], Étienne Ghys describe un ejemplo de laminación por superficies de Riemann modelada transversalmente por un conjunto de Cantor, minimal (i.e., todas las hojas son densas) y en el que existe una mezcla de tipos conformes en las hojas. De hecho, todas las hojas son parabólicas excepto una que es hiperbólica.

Para describir este ejemplo, Ghys utiliza la siguiente idea: se toma el conjunto de los árboles infinitos del grafo de Cayley del grupo  $\mathbb{Z}^2$ . Recordemos que  $\mathcal{G}(G, S)$ , el *grafo de Cayley* del grupo discreto  $G$  para el sistema de generadores  $S$ , es el grafo que se obtiene al unir mediante una arista los elementos  $g \in G$  y  $sg \in G$ , donde  $s \in S$ . Al conjunto de los árboles infinitos se le dota de la topología de Gromov–Hausdorff que lo convierte en un espacio métrico compacto y separable. Además este espacio está dotado de una estructura natural de *espacio foliado por grafos*, es decir, una laminación donde las hojas no son variedades sino grafos. Seleccionando en dicho espacio un árbol repetitivo y aperiódico se obtiene un espacio foliado minimal. Para terminar se sustituyen los árboles por superficies de Riemann mediante un proceso de engorde (véase [5], véanse también [1, 7]). Obviamente se puede sustituir el grupo  $\mathbb{Z}^2$  por cualquier otro grupo discreto finitamente generado.

El objetivo de estas notas es precisamente presentar esta construcción. Para ello se ha desglosado la construcción de la siguiente manera: en la sección 2.1 se define el espacio de Gromov–Hausdorff de los árboles, sobre el que se define la relación de equivalencia *ser trasladados* en la sección 2.2. Es posible ver  $\mathcal{T}$  como una transversal completa de un espacio foliado por grafos (teorema 7) o

---

<sup>\*</sup>Parcialmente financiado por los proyectos UPV 00127.310-E-15916 y MEC MTM2004-08214

una laminación por superficies (teorema 8). La dinámica transversa de las hojas de estos dos espacios puede “leerse” sobre la transversal  $\mathcal{T}$ . Por último, en la sección 3 se describen los minimales de estos espacios foliados, correspondientes a la clausuras de las hojas a través de árboles *repetitivos*, que son aquellos que se parecen a si mismos alrededor de cualquier vértice.

Esta construcción es fuente de ejemplos interesantes de laminaciones minimales como el descrito por É. Ghys en [5], los ejemplos de E. Blanc tomando el grupo libre con tres generadores (véase [3, 4]) o el ejemplo construido en [8] que se describe en la sección 3.2.

## 2. El espacio foliado de Gromov–Hausdorff

### 2.1. El espacio de Gromov–Hausdorff de los subárboles

Dados un grupo discreto  $G$  y  $S$  un sistema de generadores finito para  $G$ , se define  $\mathcal{T}(G, S)$  como el conjunto de todos los subárboles del grafo de Cayley  $\mathcal{G}(G, S)$  enraizados en la unidad de  $G$ , es decir:

$$\mathcal{T}(G, S) = \{T \subseteq \mathcal{G}(G, S) \mid T \text{ es un árbol y } 1_G \in T\}.$$

Para cada elemento  $T \in \mathcal{T}(G, S)$ , se denota por  $B_T(1_G, N)$  la bola abierta en el árbol  $T$  de centro  $1_G$  y radio  $N$  con respecto a la métrica natural sobre los árboles: la distancia entre vértices es el mínimo número de aristas por las que hay que pasar para ir de un vértice al otro y las aristas son isométricas al intervalo unidad.

Sobre el conjunto  $\mathcal{T}(G, S)$  es posible definir la *métrica de Gromov–Hausdorff* que, intuitivamente, dice que dos árboles son cercanos si coinciden en una gran bola centrada en  $1_G$ . Siendo más precisos: dados dos árboles  $T$  y  $T' \in \mathcal{T}$ , la distancia de Gromov–Hausdorff entre ellos será

$$d(T, T') = e^{-R(T, T')},$$

donde

$$R(T, T') = \sup\{N \geq 1 \mid B_T(1_G, N) = B_{T'}(1_G, N)\}$$

o  $R(T, T') = 0$  si no existe dicho supremo. Nótese que  $R(T, T') = 0$  si y sólo si  $\text{val}_T(1_G) \neq \text{val}_{T'}(1_G)$  y que la distancia está acotada por 1.

Esta función distancia cumple la *desigualdad ultramétrica*, una desigualdad más fuerte que la desigualdad triangular: dados  $T, T'$  y  $T'' \in \mathcal{T}(G, S)$ ,

$$d(T, T'') \leq \max\{d(T, T'), d(T', T'')\}. \quad (1)$$

En efecto, si  $N \geq 1$  es tal que

$$\begin{aligned} B_T(1_G, N) &= B_{T'}(1_G, N) \text{ y} \\ B_{T'}(1_G, N) &= B_{T''}(1_G, N), \end{aligned}$$

entonces  $B_T(1_G, N) = B_{T''}(1_G, N)$ . Así  $R(T, T'') \geq \min\{R(T, T'), R(T, T'')\}$ , de donde se deduce (1).

La desigualdad ultramétrica tiene importantes consecuencias: las bolas abiertas, cerradas y las esferas son conjuntos abiertos y cerrados. De esto se deduce que la topología generada por una *ultramétrica* es totalmente disconexa. En particular:

**Corolario 1.**  $\mathcal{T}(G, S)$  es un espacio totalmente disconexo.

Antes de continuar, resultará conveniente hacer explícita la convergencia de sucesiones en el espacio  $\mathcal{T}(G, S)$ : una sucesión  $\{T_n\}$  converge a  $T$  si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(T_n, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{n \in \mathbb{N} \mid B_{T_n}(1_G, n) = B_T(1_G, n)\} = \infty. \quad (2)$$

Teniendo en cuenta que el número de árboles contenidos en una bola cualquiera de  $\mathcal{T}(G, S)$  está acotado, un argumento diagonal clásico prueba el siguiente resultado:

**Proposición 2.**  $\mathcal{T}(G, S)$  es un espacio métrico compacto.

*Demostración.* Basta probar que  $\mathcal{T}(G, S)$  es secuencialmente compacto. Considérese una sucesión  $\{T_n\}_n$  en  $\mathcal{T}(G, S)$ . Obsérvese que sólo existe un número finito de árboles de  $\mathcal{T}(G, S)$  de diámetro menor o igual a 2. Se puede escoger por tanto una subsucesión de  $\{T_n\}_n$ ,  $\{T_{1,n}\}_n$ , de forma que  $\overline{B_{T_{1,n}}}(1_G, 1) = A_1$ , para cada  $n$ , con  $A_1 \in \mathcal{T}(G, S)$  de diámetro menor o igual a 2.

Supóngase construidas sucesiones  $\{T_{k,n}\}_n$ ,  $1 \leq k \leq M-1$  cada una subsucesión de la anterior, de forma que fijado  $k$ , las bolas cerradas  $\overline{B_{T_{k,n}}}(1_G, k)$  son todas iguales a un árbol  $A_k \in \mathcal{T}(G, S)$  de diámetro menor o igual a  $2k$ . Tenemos entonces una sucesión creciente de árboles finitos  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{M-1}$ . De nuevo, existe un número finito de árboles de  $\mathcal{T}(G, S)$  de diámetro igual o menor que  $2M$ . Por lo cual es posible escoger  $\{T_{M,n}\}_n$  una subsucesión de  $\{T_{M-1,n}\}_n$ , de forma que  $\overline{B_{T_{M,n}}}(1_G, M) = A_M$ , para cualquier  $n$  y cierto árbol  $A_M \in \mathcal{T}(G, S)$  de diámetro no superior a  $2M$ .

Por inducción para cada  $m \geq 1$  obtenemos una sucesión  $\{T_{m,n}\}_n$  verificando la condición anterior. La unión creciente de los árboles  $A_m$  define un árbol  $T \in \mathcal{T}(G, S)$ , tal que la sucesión diagonal  $\{T_{m,m}\}_m$  lo tiene por límite: por construcción  $B_{T_{m,m}}(1_G, m) = B_T(1_G, m) = A_m$ , luego  $R(T_{m,m}, T) \geq m$ , es decir,  $d(T_{m,m}, T) \rightarrow 0$ .  $\square$

La prueba anterior muestra que cualquier árbol infinito es límite de sucesiones de árboles finitos, las bolas cerradas centradas en  $1_G$ . Por otra parte si  $T$  es un árbol finito, la bola en  $\mathcal{T}(G, S)$  de centro  $T$  y radio  $\max\{d_T(1_G, x) + 1 \mid x \in T\}$  se reduce al árbol  $T$ , con lo que el derivado de  $\mathcal{T}(G, S)$  está formado por los árboles infinitos. Por lo tanto, para un grupo finito  $G$ ,  $\mathcal{T}(G, S)$  es un conjunto finito discreto. Si consideramos  $G = \mathbb{Z}$  y el sistema de generadores  $S = \{\pm 1\}$ , el espacio  $\mathcal{T}(\mathbb{Z}, S)$  es obviamente infinito contable.

**Proposición 3.** Si  $G$  es infinito, el derivado de  $\mathcal{T}(G, S)$  es un conjunto de Cantor salvo si  $G = \mathbb{Z}$  y  $S = \{\pm 1\}$ .

*Demostración.* Dado que  $\mathcal{T}(G, S)$  es compacto y totalmente desconexo, sólo hay que probar que el derivado de  $\mathcal{T}(G, S)$  es perfecto.

Según la observación anterior, cualquier árbol  $T$  es el límite de los árboles finitos  $\overline{B}_T(1_G, n)$ . Si “se alargan estas bolas en alguna dirección” se obtiene una sucesión de árboles infinitos que converge a  $T$ . Más precisamente, fijado  $n \in \mathbb{N}$ , se escoge un camino infinito  $\varepsilon_n \subset \mathcal{G}(G, S)$  que interseque a  $\overline{B}_T(1_G, n)$  en un único punto a distancia  $n$  de  $1_G$ . Dado que  $G$  es infinito, dichos caminos siempre existen. Se ha construido por tanto una sucesión de árboles  $T_n^{\varepsilon_n} = \overline{B}_T(1_G, n) \cup \varepsilon_n$  que, obviamente, converge a  $T$ .

Además, los caminos  $\varepsilon_n$  se pueden escoger de forma que los árboles  $T_n^{\varepsilon_n}$  sean todos distintos a  $T$ , salvo en el caso de  $G = \mathbb{Z}$  y  $S = \{\pm 1\}$ . En efecto, supongamos que existe  $n \in \mathbb{N}$  de forma que dado cualquier camino  $\varepsilon$  con las propiedades exigidas se tenga  $T_n^\varepsilon = T$ . En estas condiciones, todos los caminos serán el mismo. Por lo tanto el número de aristas de  $\mathcal{G}(G, S)$  incidentes en los vértices de  $\varepsilon$  es 2. Como  $G$  actúa por automorfismos sobre  $\mathcal{G}(G, S)$ , el número de aristas incidentes sobre todos los vértices de  $\mathcal{G}(G, S)$  ha de ser 2, en otras palabras,  $\mathcal{G}(G, S)$  es una recta. En consecuencia  $G = \mathbb{Z}$  y  $S = \{\pm 1\}$ .  $\square$

De la misma forma que para un grafo de Cayley de un grupo  $G$  tenemos el mismo conjunto de vértices pero distinta estructura de grafo, los espacios  $\mathcal{T}(G, S)$  son, en general, homeomorfos, pero todos poseen estructuras de grafo diferentes dependiendo del sistema de generadores  $S$ . Definir esta estructura es el propósito de la siguiente sección.

En lo que resta, cuando no exista ambigüedad, se denotará  $\mathcal{T}(G, S)$  y  $\mathcal{G}(G, S)$  simplemente por  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{G}$  respectivamente.

## 2.2. La relación de equivalencia *ser trasladados*

Dados  $T \in \mathcal{T}$  y  $g \in G$ , el *árbol trasladado*  $gT$  está definido de manera obvia. En general  $gT$  no pertenece a  $\mathcal{T}$ , ya que  $1_G$  no tiene porqué pertenecer al árbol  $gT$ . De hecho  $gT \in \mathcal{T}$  si y sólo si  $g^{-1} \in T$ .

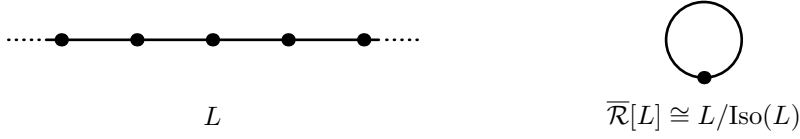
Se define sobre  $\mathcal{T}$  la relación de equivalencia *ser trasladados*, denotada por  $\mathcal{R}$ , como

$$T \mathcal{R} T' \iff g^{-1}T = T'$$

para algún  $g \in T$ . El árbol  $g^{-1}T$  puede verse como  $T$  pero con la “raíz” no en  $1_G$  sino en el vértice  $g$ . De esta forma, la clase de equivalencia de un árbol  $\mathcal{R}[T] = \{g^{-1}T \mid g \in \text{vértices}(T)\}$  puede pensarse formada por los árboles que se obtienen al cambiar el punto base a todos los vértices de  $T$ .

Esta descripción de las clases de equivalencia de  $\mathcal{R}$  permite definir una estructura de grafo simplicial de la cual  $\mathcal{T}$  será conjunto de vértices y cada componente conexa de dicha estructura simplicial nos dará una  $\mathcal{R}$ -clase. Dicho de otro modo, se realizará cada clase  $\mathcal{R}[T]$  como el conjunto de vértices de un grafo conexo  $\overline{\mathcal{R}}[T]$ . Considérese  $\mathcal{R}[T]$  como un conjunto de vértices: diremos que  $T'$  y  $T'' \in \mathcal{R}[T]$  están unidos por una arista si  $T' = s^{-1}T''$ , para cierto  $s \in S$ .




 Figura 1: El árbol  $L$  y el cociente  $L/\text{Iso}(L)$ .

Como ocurre en  $\mathcal{G}$ , los elementos  $s$  y  $s^{-1}$  generan la misma arista. El resto de los elementos de  $S$  genera aristas distintas a la anterior.

Obsérvese que un árbol perteneciente a  $\mathcal{R}[T]$  está determinado por un vértice de  $T$ . Ahora bien, dos vértices  $v$  y  $v' \in T$  determinan el mismo árbol si  $T = v'v^{-1}T$ . Con lo que el grafo  $\overline{\mathcal{R}}[T]$  es naturalmente isomorfo al grafo  $T/\text{Iso}(T)$ , donde  $\text{Iso}(T)$  denota el grupo de isotropía del árbol  $T$ , formado por los elementos de  $G$  que lo dejan invariante. En particular, el árbol  $T$  es la cubierta universal del grafo  $\overline{\mathcal{R}}[T]$  y el grupo  $\text{Iso}(T)$  es su grupo fundamental.

**Ejemplo 4.** Sea  $L \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})$  el árbol cuyos vértices son  $L = \{n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , y las aristas obvias ( $L$  es de hecho el grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}$ ). Obviamente la clase  $\mathcal{R}[T]$  se reduce a  $\{T\}$  y puesto que  $L = L + (1, 0)$ , existe una sola arista en forma de bucle en  $\overline{\mathcal{R}}[T]$ . Por otro lado  $\text{Iso}(L) = \mathbb{Z}$ . El cociente  $L/\text{Iso}(L)$  es isomorfo al grafo  $\overline{\mathcal{R}}[L]$  (véase la figura 1).

Si se considera el subárbol  $L^+$  de  $L$  constituido por los vértices correspondientes a los enteros no negativos, el grafo  $\overline{\mathcal{R}}[L^+]$  es isomorfo a  $L^+$ , ya que  $\text{Iso}(L^+) = \{0\}$ .

Estos ejemplos sugieren la siguiente definición:

**Definición 5.** Diremos que un árbol  $T \in \mathcal{T}$  es *periódico* (resp. *aperiódico*) si el grafo  $\overline{\mathcal{R}} = T/\text{Iso}(T)$  es finito (resp.  $\overline{\mathcal{R}}[T] = T$ ), es decir, el grupo de isotropía es cocompacto (resp. trivial).

Obviamente se da una situación intermedia, es decir, existen árboles cuyo cociente  $T/\text{Iso}(T)$  es no compacto, pero no coincide con  $T$ .

Recordemos que dado un grafo  $E$  y  $v \in E$  un vértice de  $E$ , la valencia de  $v$  (en  $E$ ), denotado por  $\text{val}_E(v)$ , es el número de aristas incidentes en  $v$ , teniendo en cuenta que los bucles han de contarse dos veces. Obsérvese que se puede definir la valencia de  $v$  como el número de componentes conexas de  $B_E(v, \epsilon) - \{v\}$ , siendo  $\epsilon < \frac{1}{2}$ . Por lo tanto, si  $\pi : \hat{E} \rightarrow E$  es una cubierta y  $v \in \hat{E}$  es un vértice,  $\text{val}_{\hat{E}}(v) = \text{val}_E(\pi(v))$ .

Cada árbol  $T \in \mathcal{T}$  es vértice del grafo  $\overline{\mathcal{R}}[T]$ , con lo que tiene sentido considerar la valencia. Ahora bien,  $T$  es una cubierta de  $\overline{\mathcal{R}}[T]$ , luego

$$\text{val}(T) = \text{val}_{\overline{\mathcal{R}}[T]}(T) = \text{val}_T(1_G).$$

De la misma forma es evidente que  $\text{val}(g^{-1}T) = \text{val}_T(g)$ .

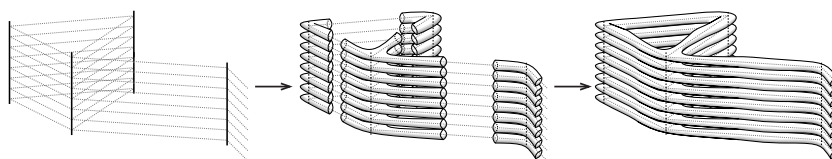


Figura 2: El proceso de engorde para obtener una laminación de un espacio foliado por grafos.

**Lema 6.** *La función valencia  $\text{val} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$  es continua.*

*Demostración.* Sean  $T$  y  $T' \in \mathcal{T}$  tales que  $d(T, T') < 1$ . Luego  $B_T(1_G, 1) = B_{T'}(1_G, 1)$  y en consecuencia  $\text{val}(T) = \text{val}_{T'}(1_G) = \text{val}_T(1_G) = \text{val}(T')$ . Así pues la función  $\text{val}$  es localmente constante, de donde se deduce la continuidad.  $\square$

### 2.3. El espacio foliado por grafos de Gromov–Hausdorff

En las construcciones del espacio  $\mathcal{T}$ , la relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  y la estructura de grafo sobre las clases de ésta, no se requiere del grafo  $\mathcal{G}$ , sino sólo los vértices y las reglas de incidencia entre ellos.

Si se piensa en  $\mathcal{G}$  como en la realización de un complejo simplicial, es posible realizar  $\mathcal{T}$  como una transversal a un espacio foliado por grafos. Intuitivamente, es necesario considerar no sólo los árboles enraizados en vértices, sino también árboles enraizados en cualquier punto de las aristas. En este sentido, cada punto de  $\overline{\mathcal{R}}[T]$  se puede considerar el árbol  $T$  enraizado no necesariamente en un vértice, de la misma forma que ocurre para los vértices  $\mathcal{R}[T] \subset \overline{\mathcal{R}}[T]$ .

Ahora bien, las aristas de los grafos  $\overline{\mathcal{R}}[T]$ , se apilan naturalmente como un producto, ya que están generadas por las transformaciones parciales  $T \mapsto s^{-1}T$ , con  $s \in S$ . Por otro lado, la valencia de los vértices es localmente constante (y uniformemente finita), por lo que, localmente también existe una estructura de producto. En resumen:

**Teorema 7** ([1, 7]). *Existe un espacio compacto, metrizable y separable  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  foliado por grafos tal que  $\mathcal{T}$  es una transversal completa y las clases de equivalencia de  $\mathcal{R}$  son los vértices de las hojas de  $\mathcal{F}$ . De hecho, las hojas de  $\mathcal{F}$  son los grafos  $\overline{\mathcal{R}}[T]$ , las realizaciones de las clases de  $\mathcal{R}$ .*

En [5], É. Ghys muestra que  $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$  es realizable como transversal completa de una laminación por superficies de Riemann de un espacio compacto. Usando esta idea, en [7], se prueba que el resultado es más general, y es aplicable a cualquier espacio compacto foliado por grafos localmente finitos. En particular se puede emplear esa construcción a cualquiera de los espacios  $\mathcal{T}(G, S)$ . Intuitivamente, se ha de sustituir la estructura de grafo que aparece alrededor de cada vértice por una “versión engordada” y pegar los bordes de la forma que indican las aristas (véase la figura 2).

**Teorema 8** ([1, 5, 7]). *Existe una laminación por superficies de Riemann  $\mathcal{L}$  sobre un espacio compacto, metrizable y separable  $M$  tal que*

1.  $T$  es una transversal completa de  $(M, \mathcal{L})$ , y la relación inducida es  $\mathcal{R}$ ;
2. si  $L_T \in \mathcal{L}$  es la hoja que pasa por  $T \in \mathcal{T}$ , ésta es casi-isométrica (en el sentido de Gromov) a  $\overline{\mathcal{R}[T]}$ .

### 3. Árboles repetitivos y minimales

Dado el par  $(T, \mathcal{R})$ , es posible asociarle una laminación por superficies de Riemann  $(M, \mathcal{L})$  (teorema 8), o si se prefiere el espacio foliado por grafos  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  (teorema 7). Para construir ejemplos minimales en estos espacios habrá que recurrir a los *árboles repetitivos*, ya que la clausura de la hoja por un árbol repetitivo es un minimal y viceversa. La estructura de estos minimales está descrita por el árbol en cuestión, como muestran los ejemplos dados al final de la sección.

#### 3.1. Árboles repetitivos y minimalidad

De manera intuitiva, diremos que un grafo es *repetitivo* o tiene la *propiedad de isomorfismo local* si no podemos distinguir en qué punto nos encontramos observando únicamente un entorno finito. Esta idea se basa en la propiedad de isomorfismo local para mosaicos descrita en [9] y la definición de mosaico repetitivo dada en [2]. La adaptación al caso de grafos aparece implícita en la tesis de E. Blanc (véase [4]). Antes de hacerla explícita, conviene introducir alguna notación:

**Definición 9.** Sean  $T$  y  $T'$  dos elementos de  $\mathcal{T}$ . Diremos que la bola  $B_T(x, r)$  se *embebe fielmente* en  $T'$  y escribiremos  $B_T(x, r) \hookrightarrow T'$  si existe algún  $g \in G$  tal que:

$$gB_T(x, r) = B_{T'}(gx, r) \subset T'.$$

Si la bola  $B_{T'}(gx, r)$  está contenida en  $B_{T'}(x', r')$ , diremos que  $B_T(x, r)$  se *embebe fielmente* en  $B_{T'}(x', r')$  y escribiremos  $B_T(x, r) \hookrightarrow B_{T'}(x', r')$ .

**Definición 10.** Un árbol  $T \in \mathcal{T}$  es *repetitivo* o tiene la *propiedad de isomorfismo local* si para cada  $r > 0$  existe  $R > 0$  tal que:

$$B_T(1_G, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$$

para cada  $y \in T$ . El árbol  $T$  será *uniformemente repetitivo* si fijado  $r > 0$  existe  $R > 0$  tal que:

$$B_T(x, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$$

para cada par de puntos  $x, y \in T$

El siguiente resultado proporciona un criterio de minimalidad para la clausura de  $\mathcal{R}[T]$  en  $\mathcal{T}$ , denotada por  $\text{cl}(\mathcal{R}[T])$ , que resultará muy útil.

**Teorema 11** ([1]). *Para cada  $T \in \mathcal{T}$ , consideremos el subconjunto cerrado y saturado  $X = \text{cl}(\mathcal{R}[T])$  de  $\mathcal{T}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $T$  es uniformemente repetitivo;
2.  $T$  es repetitivo;
3.  $X$  es minimal.

*Demostración.* [1  $\Rightarrow$  2] Esta implicación es obvia.

[2  $\Rightarrow$  3] Para demostrar que  $X$  es minimal, hemos de comprobar que la clase de equivalencia de cualquier elemento  $T' \in X$  es densa en  $X$ . Por una parte, sabemos que  $\text{cl}(\mathcal{R}[T']) \subset \text{cl}(\mathcal{R}[T]) = X$ . Luego nos basta probar que  $T \in \text{cl}(\mathcal{R}[T'])$ , en cuyo caso  $X = \text{cl}(\mathcal{R}[T]) \subset \text{cl}(\mathcal{R}[T'])$ . Para ello, fijemos  $r > 0$ . Por hipótesis, existe  $R \geq r$  tal que  $B_T(1_G, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$  para todo  $y \in T$ . Puesto que  $T' \in \text{cl}(\mathcal{R}[T])$ , existe  $x \in T$  tal que:

$$B_{T'}(1_G, R) = B_{x^{-1}T}(1_G, R) = x^{-1}B_T(x, R).$$

Si suponemos  $y = x$ , la bola  $B_T(1_G, r)$  se embebe fielmente en la bola  $B_T(x, R)$ , es decir,

$$gB_T(1_G, r) = B_T(g, r) \subset B_T(x, R)$$

para algún  $g \in G$ . Luego

$$x^{-1}gB_T(1_G, r) = x^{-1}B_T(g, r) \subset x^{-1}B_T(x, R) = B_{T'}(1_G, R).$$

Observemos que

$$x^{-1}gB_T(1_G, r) = x^{-1}B_T(g, r) = B_{x^{-1}T}(x^{-1}g, r) = B_{T'}(x^{-1}g, r).$$

En consecuencia, si denotamos  $h = x^{-1}g$ , tenemos

$$B_T(1_G, r) = h^{-1}B_{T'}(h, r) = B_{h^{-1}T'}(1_G, r).$$

En resumen, se ha encontrado un árbol  $h^{-1}T' \in \mathcal{R}[T']$  cuya distancia a  $T$  es menor que  $e^{-r}$ . Como esto sucede para todo  $r > 0$ , acabamos de concluir que  $T \in \text{cl}(\mathcal{R}[T'])$ .

[3  $\Rightarrow$  2] Fijado  $r > 0$ , a cada entero  $S > 0$ , le asociamos el conjunto

$$U_S = \{T' \in X \mid B_T(1_G, r) \hookrightarrow B_{T'}(1_G, S)\}.$$

Veamos que estos conjuntos forman un recubrimiento abierto de  $X$ .

En primer lugar, cada conjunto  $U_S$  es abierto. En efecto, dado un elemento  $T'$  de  $U_S$ , cualquier elemento  $T''$  de la bola  $B_X(T', e^{-S})$  verifica:

$$B_T(1_G, r) \hookrightarrow B_{T''}(1_G, S) = B_{T'}(1_G, S)$$

y en consecuencia la bola abierta  $B_X(T', e^{-S})$  está contenida en  $U_S$ . Por otra parte, cualquier elemento  $T'$  de  $X$  pertenece a algún abierto  $U_S$ . Por ser  $X$  minimal, como antes,  $T \in \text{cl}(\mathcal{R}[T'])$ . Por consiguiente, dado  $r > 0$ , existe  $x' \in T'$  tal que

$$B_T(1_G, r) = x'^{-1}B_{T'}(x', r).$$

Luego

$$x'_{B_T}(1_G, r) = B_{T'}(x', r) \subset B_{T'}(1_G, S)$$

siendo  $S = r + d(1_G, x')$ . Así pues,  $T'$  pertenece al conjunto  $U_S$ . Además resulta obvio que el recubrimiento  $\{U_S\}_{S>0}$  es monótono creciente con respecto a la inclusión. Por ser  $X$  compacto, deducimos que existe  $R > 0$  tal que  $X = U_R$ . Para cada  $y \in T$ , el árbol trasladado  $y^{-1}T$  pertenece a  $U_R$ , luego

$$B_T(1_G, r) \hookrightarrow B_{y^{-1}T}(1_G, R),$$

es decir,

$$B_T(g, r) = B_{g^{-1}T}(g, r) \subset B_{y^{-1}T}(1_G, R)$$

para algún  $g \in G$ . Trasladando por  $y$ , tenemos que

$$hB_T(1_G, r) = yB_{y^{-1}T}(g, r) = B_T(h, r) \subset yB_{y^{-1}T}(1_G, R) = B_T(y, R)$$

siendo  $h = gy$ . Acabamos de probar que  $B_T(1_G, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$ .

[3  $\Rightarrow$  1] Fijemos  $r > 0$  y consideremos un punto arbitrario  $x \in T$ . Como antes, para cada entero  $S > 0$ , definimos el conjunto

$$U_S^x = \{T' \in X \mid B_T(x, r) \hookrightarrow B_{T'}(1_G, S)\}.$$

Procediendo de manera análoga al caso anterior, deducimos que existe un radio  $R(r, x)$  tal que  $B_T(x, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$  para todo  $y \in T$ .

No obstante, para poder afirmar que  $T$  tiene la propiedad de isomorfismo local, necesitamos que  $R$  no dependa del punto  $x$ . Para ello, conviene hacer una observación previa. Notemos que  $B_{\mathcal{G}}(1_G, r) = g^{-1}B_{\mathcal{G}}(g, r)$  para cualquier vértice  $g$  del grafo  $\mathcal{G}$ . La compacidad de  $\mathcal{T}$  proviene del hecho de que la bola  $B_{\mathcal{G}}(1_G, r)$  sólo contiene un número finito de subárboles enraizados en  $1_G$ . Así pues, sólo hay un número finito de clases de traslación de bolas  $B_T(x, r)$  de radio  $r > 0$ . Denotemos por  $x_1, \dots, x_n$  una familia finita de puntos de  $T$  tales que las bolas  $B_T(x_i, r)$  representan todas las posibles clases de traslación.

Como consecuencia de la observación inicial, para cada  $1 \leq i \leq n$ , sabemos que:

$$B_T(x_i, r) \hookrightarrow B_T(y, R(r, x_i)).$$

Ahora, si tomamos  $R = \max\{R(r, x_1), \dots, R(r, x_n)\}$ , entonces

$$B_T(x, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$$

para cada par  $x, y \in T$ , ya que  $B_T(x, r)$  es la imagen por una traslación de alguna bola  $B_T(x_i, r)$  con esa misma propiedad.  $\square$

### 3.2. Ejemplos de árboles repetitivos

Para terminar, describiremos tres ejemplos de subárboles repetitivos del grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$ . Como nos indica el teorema 11, las clausuras de las hojas a través de dichos árboles dan lugar a laminaciones minimales.

### 3.2.1. El árbol de Kenyon

Se va a construir un árbol repetitivo y aperiódico, siendo así un ejemplo no trivial de árbol repetitivo (véase [5, 1]). La construcción se realiza de manera inductiva: se toma la pieza elemental  $T_1$  de la figura 3;

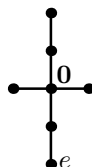


Figura 3: La pieza elemental  $T_1$ .

Se traslada en la dirección vertical la cruz mediante el vector  $(0, 2)$  para tener la base en  $e$ , luego se rotan ángulos de  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  y  $-\frac{\pi}{2}$ , y se borra a la izquierda y derecha como se indica en la figura, obteniéndose el árbol  $T_2$  de la figura 4.

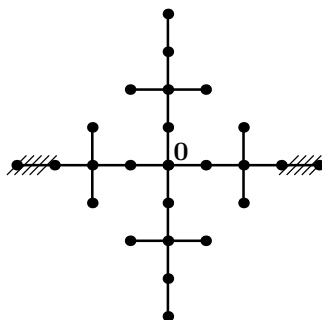


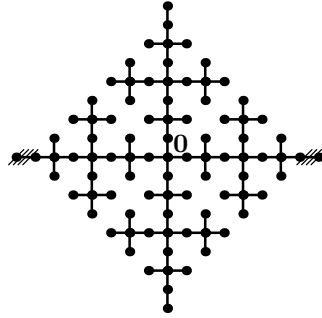
Figura 4: El árbol  $T_2$ .

Se desplaza  $T_2$  con vector de longitud 4 verticalmente y se hacen las mismas rotaciones, eliminando tras rotar las dos aristas terminales horizontales. Se tiene así el árbol  $T_3$  (véase la figura 5).

Se continúa inductivamente, y en la etapa  $n$ , se obtiene un árbol finito  $T_n$  que corta al eje vertical en un intervalo  $\{0\} \times [-2^n, 2^n]$  y al eje horizontal en  $[-2^n + 1, 2^n - 1] \times \{0\}$ . El árbol buscado es la unión creciente  $T_\infty = \bigcup_{n \geq 1} T_n$ .  $T_\infty \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$  tiene cuatro finales, donde el número de finales es el supremo de la cantidad de componentes conexas no acotadas del complementario de subárboles finitos.

Este árbol  $T_\infty$  es evidentemente aperiódico, ya que a través del origen pasan dos rectas infinitas: dado  $v \in \text{Iso}(T_\infty)$  entonces  $v \in T_\infty$  y por  $v$  pasan dos rectas infinitas, con lo que  $v = \mathbf{0}$ . Luego  $\text{Iso}(T_\infty) = \{\mathbf{0}\}$ .

Es sencillo probar que  $T_\infty$  es repetitivo: para cualquier bola  $B_{T_\infty}(\mathbf{0}, r)$  existe un  $n$  mínimo tal que dicha bola está embebida fielmente en  $T_n$ . Sea  $y \in T_\infty$  y  $m \geq n$  tal que  $y \in T_m$ . Luego  $y$  pertenece a (al menos) una de las cuatro copias


 Figura 5: El árbol  $T_3$ .

(trasladadas) de  $T_{m-1}$  que componen  $T_m$ . Procediendo de esta manera, concluimos que  $y$  pertenece a una copia de  $T_n$ , con lo que  $B_{T_\infty}(\mathbf{0}, r)$  está embebida fielmente en  $B_{T_\infty}(y, 2r)$ .

### 3.2.2. Árboles con una cantidad arbitraria par de finales

Se construirán ahora árboles aperiódicos y repetitivos con una cantidad arbitraria pero par de finales. Fijado  $k$  un entero positivo, se construirán dos árboles, uno de ellos con  $4k + 2$  finales y el otro con  $4(k + 1)$  finales.

Como en el ejemplo anterior, la construcción se realizará inductivamente, construyendo árboles finitos encajados

$$\begin{aligned} G_0 &\subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_k \subseteq \cdots \\ P_0 &\subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots \subseteq P_k \subseteq \cdots \end{aligned}$$

de forma que las piezas  $P_k$  se empleen para unir copias disjuntas de piezas  $G_k$  formando un árbol finito  $G_{k+1}$ . El árbol límite  $G_\infty = \lim G_k$  será el árbol con  $4k + 2$  finales y el límite  $P_\infty = \lim P_k$  será el árbol con  $4(k + 1)$  finales. Para simplificar la notación, escribimos  $n = 4k + 2$ .

Se comienza con el árbol finito  $G_0$  con  $n$  puntos de valencia 1, contenido en el cuadrado de lado  $l_0^G = 2n - 2$  y donde dos puntos de valencia 1 consecutivos están separados por la distancia  $2l_0^P = 4$ , explícitamente  $G_0$  es:

$$G_0 = \left( \left[ 1 - \frac{l_0^G}{2}, \frac{l_0^G}{2} - 1 \right] \times \{0\} \right) \cup \bigcup_{i=-k}^k \{2l_0^P i\} \times \left[ 1 - \frac{l_0^G}{2}, \frac{l_0^G}{2} - 1 \right].$$

Los puntos de valencia 1 de  $G_0$ , que se denotarán  $\{s_i^0\}_{i=1}^n$ , serán las *salidas* de  $G_0$ . Véase figura 6(a). Además, se define el árbol finito contenido en el cuadrado de lado  $l_0^P$ :

$$P_0 = \{0\} \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times \{0\}$$

Véase la figura 6(b).

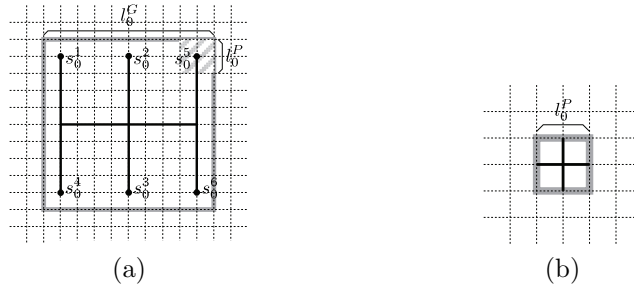


Figura 6: (a)  $G_0$  para  $k = 1$ . El orden de la familia  $\{s_i^0\}$  es irrelevante. (b)  $P_0$ .

Para construir el árbol  $G_1$ , disponemos  $n$  copias de  $G_0$  trasladadas por los vectores  $\{(n-1)s_i^0\}$ . Tendremos así una copia de  $G_0$  por cada  $s_i^0$ , colocada en la *misma posición relativa* como se muestra en la figura 7, donde se muestra el caso  $k = 1$ .

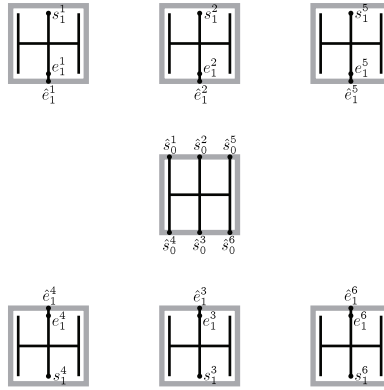


Figura 7: Paso intermedio de la construcción de  $G_1$  ( $k = 1$ ).

Por otro lado tenemos definidos los vértices  $\{s_i^1 = (n-1)s_i^0 + (n-2)\mathbf{y}(s_i^0)\}_{i=1}^n$ , siendo  $\mathbf{y}(x, y) = (0, \frac{y}{|y|})$ . Estos vértices, de valencia 1, serán las *salidas* de  $G_1$ , es decir, los vértices que se unirán en el siguiente paso a otras copias de  $G_1$ . Para cada copia de  $G_0$  se tiene además un vértice  $e_i^1 = s_i^1 - (0, l_0^G + 1)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), una *entrada*, por donde se unirá cada copia trasladada de  $G_0$  con la copia central de  $G_0$ .

Por último, se une este bosque para obtener un árbol: se conectan las copias de  $G_0$  mediante ramas formadas por piezas  $P_0$ : en primer lugar se añaden aristas verticales partiendo de los vértices  $\{e_i^1, s_i^0\}_{i=1}^n$  en las direcciones obvias, lo que nos genera otro conjunto de vértices, los vértices terminales de las aristas añadidas, que denotaremos por  $\{\hat{e}_i^1, \hat{s}_i^0\}_{i=1}^n$ , con las notaciones obvias. Se unen ahora el vértice  $\hat{s}_i^0$  con  $\hat{e}_i^1$  mediante un camino de copias de  $P_0$  evitando la formación de ciclos y de forma que no corten a la banda  $\mathbb{R} \times \left[-1 - \frac{l_0^G}{2}, \frac{l_0^G}{2} + 1\right]$ . Obteniendo



así  $G_1$  (véase la figura 8).

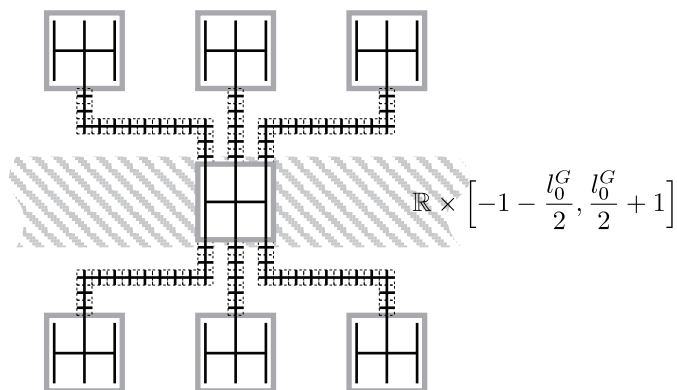


Figura 8: El árbol  $G_1$  ( $k = 1$ ).

Para construir  $P_1$  se toma  $G_0$  y se le añaden 4 aristas (véase la figura 9)

$$\begin{aligned} P_1 &= G_0 \cup \left( \left( \left[ -\frac{l_0^G}{2}, 1 - \frac{l_0^G}{2} \right] \cup \left[ \frac{l_0^G}{2} - 1, \frac{l_0^G}{2} \right] \right) \times \{0\} \right) \\ &\quad \cup \left( \{0\} \times \left( \left[ -\frac{l_0^G}{2}, 1 - \frac{l_0^G}{2} \right] \cup \left[ \frac{l_0^G}{2} - 1, \frac{l_0^G}{2} \right] \right) \right) \\ &= \left( \left[ -\frac{l_0^G}{2}, \frac{l_0^G}{2} \right] \times \{0\} \right) \cup \left( \{0\} \times \left[ -\frac{l_0^G}{2}, \frac{l_0^G}{2} \right] \right) \cup \bigcup_{i=-k}^k \{2l_0^P i\} \times \left[ 1 - \frac{l_0^G}{2}, \frac{l_0^G}{2} - 1 \right]. \end{aligned}$$

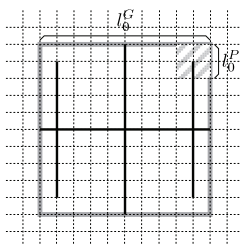


Figura 9: El árbol  $P_1$  ( $k = 1$ ).

Definidos  $P_1$  y  $G_1$  se obtiene  $G_2$  continuando de la misma forma que para el primer caso. Por otro lado, para construir  $P_k$  a partir de  $P_{k-1}$ , se procede de forma similar a la construcción de  $G_k$  a partir de  $G_{k-1}$ . Se disponen copias de  $G_{k-1}$  alrededor de la copia existente de  $P_{k-1}$  como en el caso de  $G_k$ , salvo que dos de ellas, las que se encuentran exactamente sobre  $P_{k-1}$ , se sustituyen por copias de  $P_{k-1}$ . Además, se añaden dos copias más de  $P_{k-1}$  a los lados de  $P_{k-1}$ ,

trasladadas por los vectores  $\{\pm(n-1)^k(1 - \frac{l_{k-1}^G}{2}, 0)\}$ . Se alargan las piezas como en el caso de  $G_k$  y se unen por los mismos caminos que  $G_k$ . Además, las piezas  $P_{k-1}$  laterales se unen a la pieza central por caminos rectos.

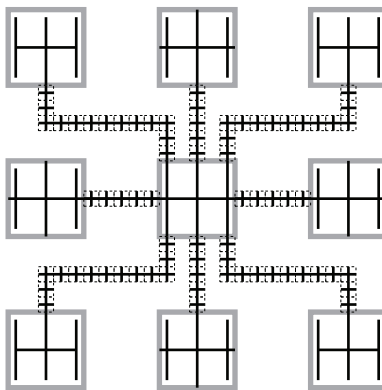


Figura 10: El árbol  $P_2$  ( $k = 1$ ).

Obtenemos de esta manera dos sucesiones  $\{P_k\}$  y  $\{G_k\}$  de árboles finitos, que obviamente convergen a dos árboles infinitos  $P_\infty$  y  $G_\infty$  de  $4(k+1)$  y  $4k+2$  finales respectivamente. Es sencillo comprobar que ambos árboles son aperiódicos y repetitivos. Además ambos árboles pertenecen al mismo minimal  $\mathcal{R}[P_\infty]$ , ya que existen copias de  $G_k$  en  $P_\infty$  para cada  $k$  y viceversa.

### 3.2.3. Árboles con diferentes tasas de aparición

El objetivo ahora es construir un ejemplo de árbol, de forma que la clausura de la hoja a través de él sea un espacio foliado con más de una medida transversa invariante. Para ello se recurrirá a la construcción clásica de S. E. Goodman y J. F. Plante (véase [6]) mediante sucesiones de Følner. En este caso, las medidas obtenidas mediante el procedimiento de Goodman y Plante pueden interpretarse como una *tasas de aparición*. Por lo que, para construir el mencionado ejemplo, se recurrirá a dos sucesiones de árboles finitos con tasas de aparición distintas.

El ejemplo que se va a construir es similar al construido por E. Blanc en [3], pero, en este caso, la construcción no se realiza en el grafo de Cayley del grupo libre con tres generadores, si no en el de  $\mathbb{Z}^2$ .

**Medidas invariantes y tasas de aparición.** En [6], S. E. Goodman y J. F. Plante describen una condición suficiente (y de carácter geométrico) para la existencia de medidas invariantes en espacios foliados compactos: la existencia de *sucesiones de Følner*.

Consideremos un espacio foliado compacto y la relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  inducida sobre una transversal completa  $X$ . Sea  $F$  un conjunto finito de transformaciones locales de  $X$  que genere la relación de equivalencia  $\mathcal{R}$ . Este conjunto

induce una estructura de grafo sobre las  $\mathcal{R}$ -clases en la que cada punto  $x$  del dominio de  $f \in F$  está unido con  $f(x)$  mediante una arista. Dada esta estructura se tiene la noción natural de *borde* de un conjunto:

$$\partial B = \{x \in B \mid f(x) \notin B \text{ para cierto } f \in F\}$$

**Definición 12.** Una familia de conjuntos finitos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una *sucesión de Følner* si

$$\frac{\#\partial A_n}{\#A_n} \longrightarrow 0. \quad (3)$$

**Teorema 13** (S. Goodman y J. Plante, [6]). *Dada  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Følner, existe una medida de probabilidad  $\mathcal{E}$ -invariante soportada por el conjunto límite de la sucesión.*

La relación ser trasladados  $\mathcal{R}$  esta obviamente generada por las traslaciones parciales  $T \mapsto s^{-1}T$  con  $s \in S$  y la construcción de medidas invariantes puede interpretarse en términos de *tasa de aparición de motivos*: consideremos  $T \in \mathcal{T}$  un árbol aperiódico y repetitivo, y  $\{A_n\}$  una sucesión de subárboles finitos de  $T$  que cumplan la condición (3). Dado que  $T$  se identifica con  $\overline{\mathcal{R}[T]}$ , los conjuntos  $A_n$  forman una sucesión de Følner dentro de  $\mathcal{R}[T]$  y definen una medida invariante soportada por la clausura de  $\mathcal{R}[T]$ . Ahora bien

$$\begin{aligned} \#(B_{\mathcal{T}}(T', e^{-r}) \cap A_n) &= \text{Número de } x \in A_n \text{ tales que } B_T(x, r) = xB_{T'}(1_G, r) \\ &= \text{Número de copias de } B_T(x, r) \text{ en } A_n. \end{aligned}$$

Por lo que  $\mu(B_{\mathcal{T}}(T', e^{-r}))$  puede interpretarse como una *tasa de aparición de  $B_{T'}(1_G, r)$* :

$$\begin{aligned} \mu(B_{\mathcal{T}}(T', e^{-r})) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(B_{\mathcal{T}}(T', e^{-r}) \cap A_n)}{\#A_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Número de copias de } B_T(x, r) \text{ en } A_n}{\#A_n} \\ &= \text{Tasa de aparición de } B_T(x, r) \text{ en el árbol } \lim A_n. \end{aligned}$$

Obsérvese que cualquier sucesión de bolas  $B_T(x, r_n)$  con  $r_n \rightarrow \infty$  es una sucesión de Følner ya que  $T$  tiene crecimiento a lo sumo cuadrático. Si sustituimos el centro de las bolas  $x$  por una sucesión arbitraria de centros  $x_n$  el resultado sigue siendo cierto. Es también cierto para una sucesión de árboles finitos  $\{A_n\}$  si existe una sucesión de bolas  $\{B_n\}$  tal que

$$B_n \subset A_n \subset B_{n+1}$$

y la diferencia de los radios de las bolas  $B_{n+1}$  y  $B_n$  está uniformemente acotada.

**Construcción.** En consecuencia, para construir un ejemplo de espacio foliado no únicamente ergódico basta definir una pareja de sucesiones de árboles finitos encajados de  $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$ ,  $\{P_n\}$  y  $\{G_n\}$  tales que:

1. Existen copias de  $P_n$  en  $G_{n+k}$  y copias de  $G_n$  en  $P_{n+k}$  (para cierto  $k \geq 0$ ). En consecuencia  $G_n \subseteq \lim P_i + v$  para cierto  $v \in \mathbb{Z}^2$ , y recíprocamente. Por lo tanto

$$\text{cl}(\overline{\mathcal{R}[P_\infty]}) = \text{cl}(\overline{\mathcal{R}[G_\infty]}),$$

siendo  $P_\infty = \lim P_i$  y  $G_\infty = \lim G_i$ .

2. Las copias de  $G_n$  dentro de  $P_{n+1}$  sean *pocas* en comparación con el volumen de  $P_{n+1}$ . Así se podrá asegurar que existen dos medidas invariantes distintas dadas por las tasas de aparición para cada una de las dos sucesiones.

Como en los casos anteriores, la construcción se realizará por inducción, pero se partirá de dos arboles en vez de uno:

Sea  $G_1$  el grafo en forma de cruz de lado 2 que se muestra en la siguiente figura, donde obviamente  $l_1 = 3$ .

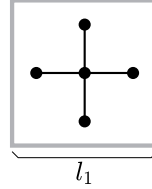


Figura 11: El árbol inicial  $G_1$ .

Por otro lado  $T_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$  es la recta horizontal infinita que pasa por el origen. Se define  $P_1$  como la bola de radio  $(l_1 - 1)/2$  centrada en el origen en  $T_1$ :  $P_1 = \overline{B}_{T_1}(\mathbf{0}, 1)$ .

Con las piezas  $P_1$  y  $G_1$  se construirá  $G_2$ : disponemos cuatro copias de  $G_1$  alrededor del propio  $G_1$ , y añadiendo cuatro aristas obtenemos un árbol mayor en forma de cruz. A cada lado de cada brazo vertical se añade una copia de  $P_1$ , obteniendo  $G_2$  (véase la figura 12(a)).

Para  $G_2$  tenemos que  $l_2 = 3l_1 = 3^2$ . Para definir  $T_2$  tomamos  $r_1$  un entero par tal que

$$\frac{\#G_1}{r_1} \leq \frac{1}{l_1}.$$

Y se insertan copias de  $G_1$  en  $T_1$  a distancia  $r_1$  entre ellos para obtener  $T_2$ , como se muestra en la figura 12(b).

Definimos entonces  $P_2 = \overline{B}_{T_2}(\mathbf{0}, (l_2 - 1)/2)$ .

Con  $P_2$  y  $G_2$  se construye  $G_3$ : se disponen cinco copias de  $G_2$  en forma de cruz y se añaden 4 copias de  $P_2$  en los brazos verticales de la misma (véase la figura 13). Obviamente  $l_3 = 3l_2 = 3^3$ . Por otro lado, se escoge  $r_2$  un múltiplo de  $r_1$  tal que se cumpla

$$\frac{\#G_2}{r_2} \leq \frac{1}{l_2}.$$

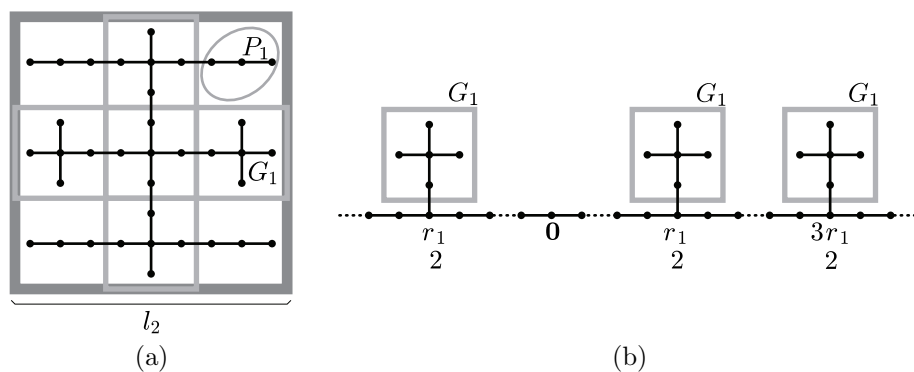


Figura 12: Segundo paso, (a) el árbol  $G_2$  y (b) el árbol  $P_2$ .

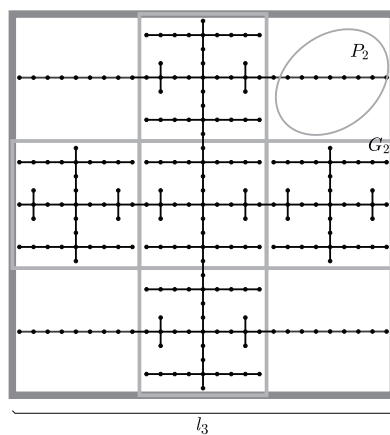


Figura 13: El árbol  $G_3$ .

Como antes se define  $T_3$ : se insertan copias de  $G_2$  en  $T_2$  separadas en intervalos de longitud  $r_2$ , de forma que estas *sustituirán* algunas de las copias de  $G_1$  como en la figura 14.

Razonando por inducción obtenemos dos sucesiones de árboles finitos,  $\{P_n\}$  y  $\{G_n\}$ , que convergen a  $P_\infty = \bigcup_n P_n = \bigcup_n T_n$  y a  $G_\infty = \bigcup_n G_n$  respectivamente. Es fácil ver que tanto  $P_\infty$  como  $G_\infty$  son aperiódicos. De forma similar al ejemplo anterior, es posible probar que tanto  $P_\infty$  como  $G_\infty$  son repetitivos. Es obvio que la clausura de la hoja por  $P_\infty$  contiene a la hoja por  $G_\infty$  y viceversa.

El hecho de que el volumen de  $G_n$  sea muy pequeño con respecto a la distancia en la que se injerta sobre la recta, permite deducir que las dos medidas  $\mathcal{R}$ -invariantes dadas por las tasas de aparición con respecto a las sucesiones de Følner  $\{P_n\}$  y  $\{G_n\}$  son distintas, como se prueba en [8].

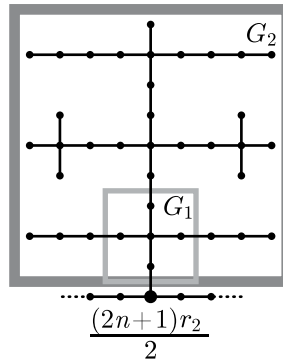


Figura 14: Sustitución de copias de  $G_1$  por copias de  $G_2$ .

## Referencias

- [1] F. ALCALDE CUESTA, Á. LOZANO ROJO, M. MACHO STADLER, Dynamique transverse de la lamination de Ghys–Kenyon. *Enviado para su publicación.*
- [2] J. BELLISSARD, R. BENEDETTI, J.-M. GAMBAUDO, Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labelling. *Comm. Math. Phys.*, **261** (2006), 1–41.
- [3] E. BLANC, Examples of mixed minimal foliated spaces. <http://www.umpa.ens-lyon.fr/~eblanc/preprints/mixed.ps>.
- [4] E. BLANC, *Propriétés génériques des laminations*, Thèse UCB-Lyon 1, 2001.
- [5] É. GHYS, Laminations par surfaces de Riemman. *Panor. Synthèses*, **8** (1999), 49–95.
- [6] S. GOODMAN, J. PLANTE, Holonomy and averaging in foliated sets. *J. Differential Geometry*, **14** (1979), 401–407.
- [7] Á. LOZANO ROJO, The Cayley foliated space of a graphed pseudogroup. En *Proceedings of the XIV Fall Workshop on Geometry and Physics, Publ. de la RSME*, Vol. 10 (2006), 267–272.
- [8] Á. LOZANO ROJO, An example of a non uniquely ergodic minimal lamination. *En preparación.*
- [9] C. RADIN, M. WOLFF, Space tilings and local isomorphism. *Geom. Dedicata*, **42** (1992), 355–360.

Álvaro Lozano Rojo  
 Universidad del País Vasco,  
 Dpto. de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología,  
 Barrio Sarriena s/n, 48940 Leioa.  
 E-mail: alvaro.lozano@ehu.es

# Soporte de las soluciones de ecuaciones diferenciales con coeficientes en cuerpos de series generalizadas de rango finito

Mickaël Matusinski

## 1. Introducción

Estudiaremos ecuaciones diferenciales del tipo  $F(y, \dots, y^{(n)}) = 0$  donde  $F(Y_0, \dots, Y_n)$  es una serie formal en  $Y_0, \dots, Y_n$  con coeficientes en un cierto cuerpo de *series generalizadas*  $\mathcal{M}_r$ . Nuestro problema es comprender la relación que hay entre el conjunto de los exponentes de sus coeficientes (que denotamos  $\text{Supp } F$ ) y los exponentes de los elementos de  $y_0 \in \mathcal{M}_r$  soluciones (que denotamos  $\text{Supp } y_0$ ).

Dado un grupo abeliano totalmente ordenado  $G$ , llamamos *serie generalizada con potencias en  $G$*  a una expresión  $a = \sum_{g \in G} A_g t^g$ . Los coeficientes  $A_g$  son reales,

$t$  es la variable abstracta y el *soporte* de  $a$  (el conjunto de exponentes  $g \in G$  tal que  $A_g \neq 0$ ) es un subconjunto *bien ordenado* de  $G$ . Hahn demostró en [Hah07] que el conjunto de las series generalizadas es un cuerpo valorado.

El estudio de las series generalizadas está en la confluencia de recientes adelantos en varios campos. Subrayamos en los diferentes contextos que vamos a citar la importancia de la *teoría de los cuerpos valorados de característica cero*. También abordamos nuestro trabajo con valoraciones.

En el caso del cuerpo  $\mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))$  provisto de la valoración y de la derivación usuales, hay dos resultados cercanos. En [GS91], D. Y. Grigoriev y M. F. Singer consideran ecuaciones diferenciales polinomiales  $P(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$  con  $P \in \mathbb{Q}[[x, Y_0, \dots, Y_n]]$ . En tal caso prueban que todo elemento de  $\mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))$  solución tiene sus exponentes en un  $\mathbb{Z}$ -módulo finitamente generado.

J. Cano estudia en [Can93] series generalizadas con potencias racionales soluciones de ecuaciones diferenciales de tipo  $f(x, y, y' \dots, y^{(n)}) = 0$ , donde  $f(x, y, \dots, y^{(n)}) \in \mathbb{R}[[x, Y_0, \dots, Y_n]]$ . Entonces demuestra que los exponentes de una tal serie tienen un denominador común (serie de tipo Puiseux). Después utiliza su resultado para determinar el índice de Gevrey de la solución en función del de la serie formal  $f$  que define la ecuación.

F. Cano, R. Moussu y J.-P. Rolin utilizan una versión ligeramente diferente de este último resultado en [CMR05]: dados una ecuación  $f = 0$  y una serie generalizada en  $\mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))$  solución, entonces sus exponentes pertenecen a un *retículo*, es decir, un subsemigrupo finitamente generado de  $\mathbb{R}_+$ . Les sirve de

etapa en la prueba de un teorema de desingularización de campos de vectores en dimensión tres a lo largo de una trayectoria no oscilante.

Estos resultados son casos particulares de un teorema mucho más general probado por J. van der Hoeven en su tesis [Hoe97]. Sin entrar en los detalles, se puede resumir así: *una transerie con soporte bien ordenado que es solución de un polinomio diferencial con coeficientes reticulados es también reticulada.*

Las *transeries* son series formales construidas por inducción a partir de  $\mathbb{R}$ ,  $x$ , las operaciones de cuerpo, la exponencial, el logaritmo y un procedimiento de sumación infinita parecido a la construcción de las series generalizadas a partir de un cuerpo ordenado abstracto. Se obtiene así un *cuerpo totalmente ordenado, real cerrado, estable por derivación, integración, composición e inversión funcional*. J. Écalle introduzco por primera vez las transeries en su prueba de la conjetura de Dulac (cfr. [Éca92]).

Encontramos en otros contextos cuerpos similares al de las transeries llamados cuerpo de *series logarítmico-exponenciales (LE-series)*, o también *series exp-log*. Son utilizados en teoría de modelos, en particular para comprender ciertas propiedades de cuerpos estables por la exponencial (es decir, un isomorfismo entre el grupo aditivo del cuerpo y su subgrupo multiplicativo de elementos positivos). F.-V. Kuhlmann, S. Kuhlmann y S. Shelah probaron en [KKS97] que los cuerpos de series generalizadas no triviales no pueden ser estables por exp. Pero pueden ser provistos de una exponencial real restringida, e incluso de cualquier función analítica restringida (cfr. [DMM94]). L. van den Dries introdujo el cuerpo de las *LE-series* estudiando el problema de Tarski sobre la exponencial real (cfr. [Dri84], [Dri86]).

Otro campo de investigación que está relacionado con las series generalizadas es el de los cuerpos de Hardy (los cuerpos de gérmenes de funciones reales en infinito estables por derivación). Son cuerpos naturalmente valorados y se define una noción de rango que es el número de clases arquimedianas del grupo de valoración. Estos cuerpos son una herramienta importante en el estudio de funciones no oscilantes. En particular, en el caso de rango finito, Rosenlicht muestra en [Ros83] que existe una escala asintótica finitamente generada en la cual se pueden desarrollar los elementos del cuerpo.

F. Cano, R. Moussu y J.-P. Rolin utilizan esta propiedad en la prueba del teorema de desingularización: el conjunto de las funciones meromorfas cerca de la singularidad evaluadas en una trayectoria trascendente no oscilante es un cuerpo de Hardy de rango menor que la dimensión del espacio, que es tres. En el caso en que este cuerpo es de rango uno, muestran que las coordenadas de la trayectoria son soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales y entonces utilizan el resultado de J. Cano para mostrar que el desarrollo de las coordenadas son series de tipo Puiseux.

## 2. Campos de vectores y ecuaciones subanalíticas

Para ilustrar la relación entre campos de vectores, cuerpos de Hardy y series generalizadas, citamos a partir de [MR06] el siguiente teorema que generaliza el



precedente método en dimensión cualquiera:

**Teorema 2.1** *Sean  $X$  un campo de vectores analítico sobre una variedad analítica real  $M$  de dimensión  $n$  y  $\gamma$  una trayectoria de  $X$  trascendente y subanalíticamente no oscilante. Sea  $p$  el punto límite de  $\gamma$  y un sistema de coordenadas locales analítico  $(x_1, \dots, x_n)$  centrado en  $p$  tal que el gráfico de  $\gamma$  pertenezca al primer ortante y admita una parametrización  $x_1 \mapsto (x_1, x_2(x_1), \dots, x_n(x_1))$ . Si cada componente de  $\gamma$  admite un desarrollo asintótico  $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_1^{\mu_i}$ , entonces los exponentes  $\mu_i$  pertenecen a un semigrupo finitamente generado de  $\mathbb{R}_+$ .*

Para probarlo, empezamos generalizando el procedimiento de eliminación y resolución de ecuación diferencial de F. Cano, R. Moussu y J.-P. Rolin. Transformamos el campo de vectores  $\dot{x}_i = a_i(x_1, \dots, x_n)$  en el sistema de  $n - 1$  ecuaciones diferenciales  $a_1(x_1, \dots, x_n)x'_i = a_i(x_1, \dots, x_n)$ . Entonces aplicamos  $n - 1$  veces el procedimiento siguiente: derivamos la primera ecuación y eliminamos  $x'_1, \dots, x'^{i-1}, x'^{i+1}, \dots, x'_n$  con las otras ecuaciones. Así reducimos el campo de vectores a un sistema de  $n - 2$  ecuaciones diferenciales

$$f_j(x_1, x_2(x_1), \dots, x_2^{(n-1)}(x_1), x_3(x_1), \dots, x_n(x_1)) = 0.$$

La proyección del conjunto analítico  $A = \{f_1 = \dots = f_{n-2} = 0\} \subset \mathbb{R}^{2n-1}$  sobre el espacio  $\mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}^{n-2}$  es un conjunto subanalítico  $\pi(A)$ . Entonces existe una función subanalítica  $H$  tal que la curva no oscilante

$$x_1 \mapsto (x_1, x_2(x_1), \dots, x_2^{(n-1)}(x_1))$$

verifica la ecuación  $H = 0$ . Es decir, la función  $\varphi : x_1 \mapsto x_1^{-(n-1)}x_2(x_1)$  es solución de una ecuación diferencial subanalítica

$$f(x_1, \varphi(x_1), \dots, x_1\varphi'(x_1), \dots, x_1^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x_1)) = 0.$$

Entonces el teorema es una consecuencia directa del resultado siguiente:

**Teorema 2.2** *Sea  $f$  una función subanalítica en una vecindad del origen de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Sea un elemento  $\varphi$  de un cuerpo de Hardy en el origen de  $\mathbb{R}_+$  solución de la ecuación diferencial  $f(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$ . Si  $\varphi$  tiene un desarrollo asintótico  $\hat{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\mu_i}$  con  $\mu_i \in \mathbb{R}_+$ , entonces los exponentes  $\mu_i$  pertenecen a un semigrupo finitamente generado de  $\mathbb{R}_+$ .*

Nuestra prueba utiliza una descomposición de las funciones subanalíticas como la que se encuentra en [DMM94] o en [LR97]: una función subanalítica real en una vecindad del origen se puede escribir como una composición finita de funciones de los tres tipos siguientes:

1. funciones analíticas en un entorno del origen de  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$

2. ramificaciones  $x \mapsto x^r$ ,  $x \geq 0$ ,  $r \in \mathbb{Q}$
3. la función división  $D(x, y) = \frac{x}{y}$  si  $|y| \geq |x|$  y  $D(x, y) = 0$  si no

Hacemos una prueba por inducción sobre la “complejidad de la función subanalítica” relativa a la precedente descomposición. Es decir, probamos que, considerando una función candidata a ser solución de la ecuación subanalítica, hay dos casos: o bien esta función es solución de una ecuación más simple (es decir, con una descomposición más simple), o bien podemos “monomializar” la ecuación: existe una parte inicial  $p_{k_0} = \sum_{i=1}^{k_0} c_i x^{\mu_i}$  de  $\hat{\varphi}(x)$  tal que, denotando  $\hat{\varphi}(x) = p_{k_0} + \varphi_1(x)$ , tenemos  $F(x, \hat{\varphi}(x), \dots, x^n \hat{\varphi}^{(n)}(x))$ . En particular, en este último caso  $\hat{\varphi}$  no puede ser solución de la ecuación y  $\varphi$  tampoco.

Subrayamos esta dualidad que, como vamos a ver, es bastante general. El resultado que vamos a presentar generaliza este último teorema al caso de ecuaciones y soluciones en un cuerpo de series generalizadas de rango finito.

### 3. Cuerpos de series generalizadas de rango finito

Nos interesamos en los cuerpos de series de potencias en un grupo abeliano totalmente ordenado de *rango finito*  $r \in \mathbb{N}$ , es decir, con un número finito de clases arquimedianas. El teorema de inmersión de Hahn (cfr. [Hah07]) nos dice que un grupo tal es isomorfo a un subgrupo del *producto lexicográfico* de  $r$  copias de  $\mathbb{R}$  (*producto de Hahn*).

Así consideramos el caso de las series generalizadas con coeficientes reales y exponentes en  $\mathbb{R}_{lex}^r$ . Denotamos el conjunto de estas series  $\mathcal{M}_r = \mathbb{R}((t^{\mathbb{R}_{lex}^r}))$ , donde  $t$  es una variable formal; sus elementos son de la forma  $a = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_{lex}^r} A_\alpha t^\alpha$  con  $A_\alpha \in \mathbb{R}$  y con un soporte  $\text{Supp } a = \{\alpha \in \mathbb{R}_{lex}^r \mid A_\alpha \neq 0\}$  subconjunto bien ordenado de  $\mathbb{R}_{lex}^r$ . Es conocido desde [Hah07] que este conjunto de series es un cuerpo con la adición usual y el producto de convolución. Además, es un cuerpo valorado con valoración  $v : a \mapsto \min(\text{Supp } a)$ .

Adoptamos otra notación para los elementos de este cuerpo; para todo  $i \in \{1, \dots, r\}$ , ponemos  $t_i = t^{e_i}$  donde  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  con el 1 en la  $i$ -ésima posición es el  $i$ -ésimo generador del grupo  $\mathbb{R}^r$ ; así  $v(t_1) = e_1 > \dots > v(t_r) = e_r$ . Podemos escribir un elemento de  $\mathcal{M}_r$ ,

$$a = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{R}} t_1^{\alpha_1} \sum_{\alpha_2 \in I_{\alpha_1} \in \mathbb{R}} t_2^{\alpha_2} \cdots \sum_{\alpha_r \in I_{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}} \in \mathbb{R}} M_\alpha t_r^{\alpha_r}.$$

Construimos una derivación sobre el cuerpo  $\mathcal{M}_r$ . Definimos las derivadas de los generadores como elementos del cuerpo:  $\forall i \in \{1, \dots, r\}$   $t_i' \in \mathcal{M}_r$  y añadimos las tres hipótesis siguientes:

**(H0)** Para todo elemento  $a = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_{1 \text{ ex}}^r} A_\alpha t^\alpha$  de  $\mathcal{M}_r$ , definimos  $a' = \sum A_\alpha (t^\alpha)'$

$$\text{donde } (t^\alpha) = (t_1^{\alpha_1} \cdots t_r^{\alpha_r})' = t_1^{\alpha_1} \cdots t_r^{\alpha_r} \left( \alpha_1 \frac{t_1'}{t_1} + \cdots + \alpha_r \frac{t_r'}{t_r} \right).$$

**(H1)** para todos  $a, b \in \mathcal{M}_r$ ,  $v(a) \leq v(b) \Leftrightarrow v(a') \leq v(b')$

**(H2)**  $v\left(\frac{t_k'}{t_k}\right) < v\left(\frac{t_{k+1}'}{t_{k+1}}\right) \quad \forall k \in \{1, \dots, r-1\}$

La primera hipótesis es lo que J. M. del Blanco Maraña llama en su tesis [Bla06] una derivación *bien definida*. Las dos siguientes son equivalentes a decir que nuestro cuerpo es un *pre-H-field* (cfr. [AD05]). Estas hipótesis son verificadas por los cuerpos de Hardy y por el cuerpo de las transeries.

**Ejemplo 3.1** El ejemplo que desarrollamos a lo largo de esta conferencia es el siguiente:

$$\text{Ponemos } \begin{cases} t_1 &= \exp\left(\frac{-1}{x}\right) \\ t_2 &= x \\ t_3 &= \frac{-1}{\log(x)} \end{cases}$$

$$\text{y } v(t_1) = (1, 0, 0) > v(t_2) = (0, 1, 0) > v(t_3) = (0, 0, 1).$$

Con la derivación usual, tenemos:

$$\begin{cases} t_1' &= \frac{\exp\left(\frac{-1}{x}\right)}{x^2} = t_1 t_2^{-2} \\ t_2' &= 1 \\ t_3' &= \frac{1}{x \log 2(x)} = t_2^{-1} t_3 2 \end{cases}$$

$$\text{y } v(t_1') = (1, -2, 0) > v(t_2') = (0, 0, 0) > v(t_3') = (0, -1, 2).$$

Para enunciar el teorema principal daremos las definiciones siguientes. Dados subconjuntos bien ordenados  $X_1$  y  $X_2$  de  $\mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$  y reales positivos  $\alpha$  y  $\beta$ , llamamos *transformaciones elementales* a:

- sumar dos conjuntos:  $X_1 + X_2 = \{\xi_1 + \xi_2 \mid \xi_1 \in X_1, \xi_2 \in X_2\}$
- añadir un nuevo generador:  $X_1 + \mathbb{N}\alpha$
- generar un semigrupo aditivo:  $\langle X_1 \rangle = \{k_1 \xi_1 + \cdots + k_q \xi_q \mid k_i \in \mathbb{N}, \xi_i \in X_1, q \in \mathbb{N}\}$
- la traslación negativa por  $\beta$ :  $(X_1)_{\geq \beta} - \beta$

Para todo orden de derivación  $n \in \mathbb{N}$  en las ecuaciones diferenciales que consideramos, existen  $r$  subconjuntos bien ordenados  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$  de  $\mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$  contruidos a partir de los soportes de las derivadas  $t_i'$  de los generadores del cuerpo.

**Teorema 3.2** Sea  $F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]]$ ; consideremos la ecuación correspondiente

$$F(y, \dots, y^{(n)}) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^I = 0$$

con  $c_I \in \mathcal{M}_r$  y cuyo soporte  $\text{Supp } F = \bigcup_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} \text{Supp } c_I$  es un subconjunto bien ordenado de  $\mathbb{R}^r$ . Sea  $y_0 \in \mathcal{M}_r$  una solución con

$$v(y_0) > \max \left\{ (0, \dots, 0), -nv \left( \frac{t'_1}{t_1} \right) \right\};$$

entonces los exponentes de  $y_0$  pertenecen a un subconjunto bien ordenado de  $\mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$  construido a partir de  $\text{Supp } F$ ,  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$  con un número finito de transformaciones elementales.

Este resultado tiene un corolario en el caso “reticulado”, es decir:

**Corolario 3.3** Si el soporte de la ecuación y los conjuntos  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$  están incluidos en un retículo (subsemigrupo aditivo finitamente generado) de  $\mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$ , entonces el soporte de una solución  $y_0 \in \mathcal{M}_r$  con

$$v(y_0) > \max \left\{ (0, \dots, 0), -nv \left( \frac{t'_1}{t_1} \right) \right\}$$

también pertenece a un retículo de  $\mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$

Para poder evaluar una ecuación como la del teorema en una serie generalizada  $y_0$ , tenemos que asegurarnos (como en [Can93]) de que

$$v(y_0) > (0, \dots, 0), v(y'_0) > (0, \dots, 0), \dots, v(y_0^{(n)}) > (0, \dots, 0).$$

La condición  $v(y_0) > \max \left\{ (0, \dots, 0), -nv \left( \frac{t'_1}{t_1} \right) \right\}$  es suficiente; la condición en [Can93] es  $v(y_0) > n$ .

## 4. Compendio de la prueba del teorema principal

Las pruebas de los resultados de D. Y. Grigoriev y M. F. Singer (cfr. [GS91]), J. Cano (cfr. [Can93]), F. Cano, R. Moussu y J.-P. Rolin (cfr. [CMR05]) y J. van der Hoeven (cfr. [Hoe97], [Hoe06]) utilizan unas generalizaciones del método del polígono de Newton-Fine. En nuestro caso, decidimos no utilizar este método, y expresar directamente las relaciones valuativas entre los exponentes de una solución y los de los coeficientes de la ecuación.

La idea principal de la prueba es que, cuando evaluamos la ecuación en pares iniciales cada vez más largas de una serie  $y_0$  cualquiera, hay dos casos:

- o bien la valoración de la ecuación es creciente, lo que corresponde a valores precisos de los exponentes de la serie

- o bien la valoración de la ecuación se estabiliza a partir de una cierta parte inicial. Entonces la serie  $y_0$  no puede ser solución.

Primero, observamos que una serie  $y_0$  con  $v(y_0) > (0, \dots, 0)$  se escribe

$$\begin{aligned} y_0 &= \sum_{\mu_r > 0} M_{(0, \dots, 0, \mu_r)} t_r^{\mu_r} + \sum_{\mu_{r-1} > 0} t_{r-1}^{\mu_{r-1}} \sum_{\mu_r \in I_r} M_{(0, \dots, 0, \mu_{r-1}, \mu_r)} t_r^{\mu_r} + \dots \\ &= y_{0,r} + \dots + y_{0,1} \end{aligned}$$

Como en [CMR05], definimos a partir de la derivación inicial  $r$  nuevas derivaciones privilegiadas:

$$\forall k \in \{1, \dots, r\} \quad , \quad D_k(y) = \frac{y'}{\delta \left( \frac{t'_k}{t_k} \right)}$$

donde  $\delta \left( \frac{t'_k}{t_k} \right)$  es el término dominante de  $\frac{t'_k}{t_k}$ . Para todo monomio  $t_k^{\mu_k} \dots t_r^{\mu_r}$  de  $y_{0,k}$ , tenemos  $D_k^i(t_k^{\mu_k} \dots t_r^{\mu_r}) \sim \mu_k^i t_k^{\mu_k} \dots t_r^{\mu_r}$ . El interés está que cada derivación es adaptada a la parte  $y_{0,k}$  de  $y_0$  que vamos a considerar. Además, nos permite definir los conjuntos  $\mathcal{T}_k$  que nos permiten relacionar el soporte de la ecuación con los exponentes de la parte inicial en cual la evaluamos:

$$\text{Supp} (F(y_{0,k}, \dots, D_k^n y_{0,k})) \subseteq \text{Supp} F + \mathcal{T}_k + \text{Supp} y_{0,k}$$

$$\text{donde } \mathcal{T}_k = \left\langle \text{Supp} \frac{D_k t_k}{t_k} \right\rangle + \dots + \left\langle \text{Supp} \frac{D_k^n t_k}{t_k} \right\rangle + \dots + \left\langle \text{Supp} \frac{D_k t_r}{t_r} \right\rangle + \dots + \left\langle \text{Supp} \frac{D_k^n t_r}{t_r} \right\rangle$$

**Ejemplo 4.1** Tenemos:

$$\begin{cases} D_1 y = x^2 y' \\ D_2 y = x y' \\ D_3 y = -x \log(x) y' \\ \mathcal{T}_1 = \mathbb{N}(1, 0, 0) + \mathbb{N}(0, 2, 0) + \mathbb{N}(0, 3, 0) + \\ \quad \mathbb{N}(0, 1, 2) + \mathbb{N}(0, 2, 2) + \mathbb{N}(0, 2, 3) + \mathbb{N}(0, 3, 4) \\ \mathcal{T}_2 = \mathbb{N}(0, 1, 0) + \mathbb{N}(0, 0, 2) + \mathbb{N}(0, 0, 3) \\ \mathcal{T}_3 = \mathbb{N}(0, 0, 1) \end{cases}$$

Observamos que en este caso, para  $n \geq 4$ , los  $\mathcal{T}_k$  son independientes de  $n$ .

La prueba del teorema principal utiliza una *inducción sobre el número de generadores que intervienen en la escritura de una parte inicial de  $y_0$* . Es decir hay dos grandes partes:

- el caso inicial donde consideramos una parte inicial  $y_{0,r} = \sum_{\mu_r > 0} M_{(0, \dots, 0, \mu_r)} t_r^{\mu_r}$ .
- la inducción donde suponemos el teorema cierto para una parte inicial  $y_{0,r} + \dots + y_{0,k+1}$  y lo probamos para la parte  $y_{0,k}$ .

En los dos casos consideramos directamente ecuaciones con la “buena” derivación (la que está adaptada a la parte inicial considerada). Tendremos, después, que justificar los *cambios de derivación* que permiten pasar de una ecuación de tipo  $F(y, \dots, y^{(n)}) = 0$  a otra de tipo  $\tilde{F}(z, \dots, D_k^n z) = 0$ .

Primero introducimos una noción de *orden de Weierstrass* de la ecuación que generaliza la noción de orden de regularidad de Weierstrass en el caso de las ecuaciones algebraicas (cfr. por ejemplo [KP02]). Una ecuación  $F(y, \dots, y^{(n)}) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)} = 0$  es de orden de Weierstrass  $w \in \mathbb{N}$  si:

- para todo  $I \in \mathbb{N}^{n+1}$ ,  $v(c_I) \geq (0, \dots, 0)$
- existe  $I \in \mathbb{N}^{n+1}$  con  $|I| = w$  y  $v(c_I) = (0, \dots, 0)$
- para todo  $I \in \mathbb{N}^{n+1}$  con  $|I| < w$  y  $v(c_I) > (0, \dots, 0)$

Toda ecuación con soporte bien ordenado tiene un orden de Weierstrass: basta con dividir la ecuación por el término dominante de los coeficientes. Nuestro orden de Weierstrass es el análogo del *orden de Newton* en la prueba de J. van der Hoeven, en su prueba con el polígono de Newton-Fine (cfr. [Hoe97], [Hoe06]).

En la etapa inicial (i) de la inducción, la parte inicial de  $y_0$  es de tipo  $y_{0,r} = \sum_{\mu \in \mathbb{R}} M_\mu t_r^\mu$ , es decir, sólo intervienen potencias del generador  $t_r$ , el “menos plano”.

Es un caso análogo al de rango uno ( $r = 1$ ).

Dada una ecuación  $F(y, \dots, D_r^n y) = 0$  de orden de Weierstrass  $w > 0$ , existen multi-índices  $I \in \mathbb{N}^{n+1}$  de longitud  $|I| = r - 1$  tales que las derivadas parciales de la ecuación correspondientes  $F^{(I)}$  sean de orden de Weierstrass 1. Entonces dado uno de estos multi-índices  $I$ , denotamos  $\mathcal{A}_I = \{J \in \mathbb{N}^{n+1} \mid |J| = 1, v(c_{I+J}) = (0, \dots, 0)\}$  y definimos el *polinomio anulador* asociado a  $I$  como

$$\pi_I(X) = \sum_{J \in \mathcal{A}_I} \delta(c_{I+J}) X^{i_J}$$

donde  $i_J$  es la posición de 1 en  $J = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ .  $\pi_I$  es un polinomio escalonado de grado menor que  $n$ . Notamos  $\rho$  el conjunto de sus raíces positivas.

Según la formula de Taylor, para toda parte inicial  $p_S + M_{\tilde{\mu}} t_r^{\tilde{\mu}}$  de  $y_{0,r}$ , tenemos:

$$F^{(I)}(p_S + M_{\tilde{\mu}} t_r^{\tilde{\mu}}) = F^{(I)}(p_S) + M_{\tilde{\mu}} t_r^{\tilde{\mu}} (\pi_I(\tilde{\mu} + b_S^{(I)})) \quad \text{con } v(b_S^{(I)}) > (0, \dots, 0)$$

Entonces deducimos de la desigualdad de la valoración que hay dos casos:

- o bien para toda parte inicial  $p_S + M_{\tilde{\mu}} t_r^{\tilde{\mu}}$  de  $y_{0,r}$ , tenemos:  $v(F^{(I)}(p_S)) = \tilde{\mu}$  o  $\tilde{\mu} \in \rho$ . En este caso probamos por inducción transfinita que  $\text{Supp } y_{0,r} \subseteq \text{Supp } F^{(I)} + \mathcal{T}_r + \langle \rho \rangle \subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_r + \langle \rho \rangle$ ,

- o bien existe una parte inicial  $p_{S_0} + M_{\tilde{\mu}_0} t_r^{\tilde{\mu}_0}$  de  $y_{0,r}$  tal que:  $v(F^{(I)}(p_{S_0} + M_{\tilde{\mu}_0} t_r^{\tilde{\mu}_0})) = \min\{v(F^{(I)}(p_{S_0})), \tilde{\mu}_0\}$ . La valoración asociada a  $F^{(I)}$  se estabiliza en  $v(F^{(I)}(p_{S_0} + M_{\tilde{\mu}_0} t_r^{\tilde{\mu}_0}))$  cual es menor que  $\tilde{\mu}_0$ .

En el caso donde tenemos estabilización para todo  $I$  tal que  $F^{(I)}$  sea de orden de Weierstrass 1, probamos que hay una valoración estabilizada dominante para todas las derivadas parciales  $F^{(I)}$  con  $|I| = r - 1$  a partir de una cierta parte inicial  $p_{S_0}$  de  $y_{0,r}$ . Entonces podemos considerar la ecuación “reducida” al orden de Weierstrass  $r - 1$ , y repetir el razonamiento precedente con las derivadas parciales a los “pisos” menores que  $r - 2$ .

Así tenemos los dos casos principales:

- o bien existe un piso  $k \in \{1, \dots, r - 1\}$  tal que  $\text{Supp } y_{0,r}$  pertenece a un subconjunto bien ordenado de  $\mathbb{R}_{\geq(0, \dots, 0)}^r$  construido a partir de  $\text{Supp } F$  y  $\mathcal{T}_r$  con un número finito de transformaciones elementales,
- o bien existe una parte inicial  $p_{S_1}$  de  $y_{0,r}$  tal que la valoración de la ecuación  $F = 0$  ella misma se estabiliza. En este caso,  $y_0$  no puede ser solución.

En la etapa (ii) de la inducción, consideramos una parte inicial  $y_{0,k}$  y una ecuación de la forma  $F(y, \dots, D_k^n y) = 0$ . Entonces utilizamos el mismo razonamiento, con una dificultad suplementaria.

Las raíces de los polinomios anuladores son ciertos valores de  $\mu_k$  en la valoración  $(0, \dots, 0, \mu_k, \dots, \mu_r)$  de los términos  $M_\mu t^\mu$  de  $y_{0,k}$ . Tenemos entonces que determinar a qué conjunto pertenecen los  $(\mu_{k+1}, \dots, \mu_r)$  cuando  $\mu_k$  es raíz de un polinomio anulador. Ilustramos esto con el diagrama siguiente en el caso  $r = 2$ :

Para allanar esta dificultad, **suponemos que  $y_0$  es solución de la ecuación** y nos reducimos al caso de una ecuación de tipo  $G(y, \dots, D_l^n y) = 0$  con una serie solución  $z_{0,l}$ . Denotamos  $\rho_1$  una raíz del polinomio anulador,  $p_{S_1}$  la parte inicial de  $y_{0,k}$  con soporte  $S_1 = \{(0, \dots, 0, \mu_k, \dots, \mu_r) \in \text{Supp } y_{0,k} \mid \mu_k < \rho_1\}$  y suponemos que  $S_1$  pertenece a un “buen” subconjunto de  $\mathbb{R}_{\geq(0, \dots, 0)}^r$  (como en el teorema). Denotamos  $\mu_0 = \min(\text{Supp } y_{0,k} \setminus S_1) = (0, \dots, 0, \rho_1, \mu_{0,k+1}, \dots, \mu_{0,r})$  y  $M_{\mu_0} t^{\mu_0}$  el término de  $y_{0,k}$  correspondiente. Admitimos aquí que las transformaciones siguientes son bien definidas.

Primero, “trasladamos” la ecuación  $F(y, \dots, D_k^n y) = 0$  de  $p_{S_1} + M_{\mu_0} t^{\mu_0}$ , es decir, hacemos el cambio de variable  $y = y_1 + p_{S_1} + M_{\mu_0} t^{\mu_0}$  en la ecuación. Obtenemos una ecuación  $\hat{F}(y_1, \dots, D_k^n y_1) = 0$  con una solución  $y_1 = \sum_{\mu > \mu_0} M_\mu t^\mu$ .

Esta serie tiene una parte inicial  $y_{1,k} = \sum_{\mu > \mu_0, \mu_k = \rho_1} M_\mu t^\mu$ .

Segundo, hacemos la “explosión”  $y_1 = t^{\mu_0} z$  en la ecuación precedente. Obtenemos una ecuación  $\tilde{F}(z, \dots, D_k^n z) = 0$  con una serie solución  $z_0 = \frac{y_1}{t^{\mu_0}}$ .  $z_0$  tiene parte inicial de forma  $z_{0,l}$  por un cierto  $l > k$ .

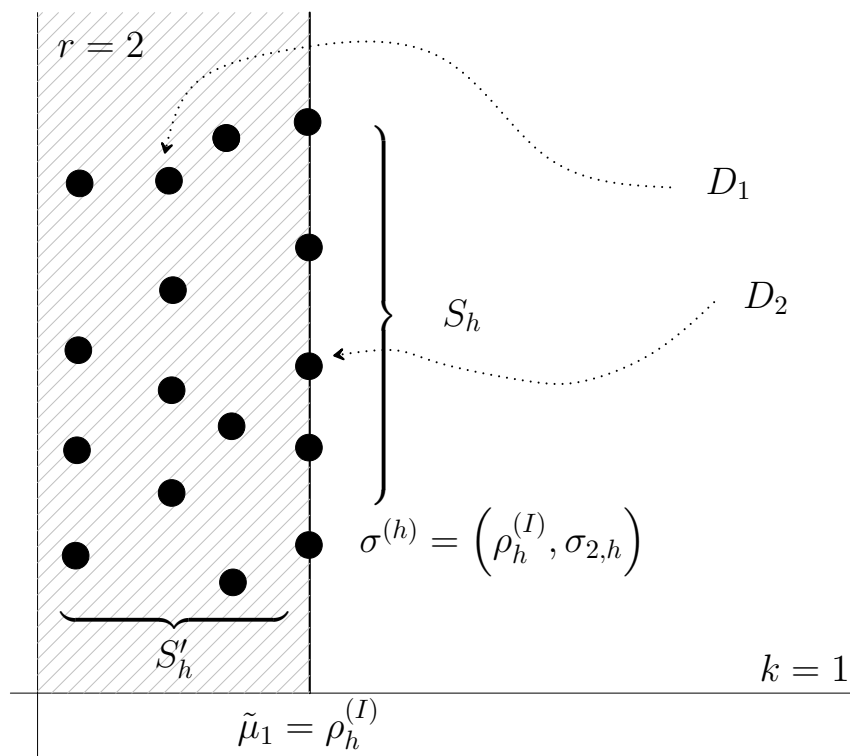


Figura 1: Disposición del soporte de  $y_0$  con  $r = 2$  y  $k = 1$

Tercero, hacemos el “cambio de derivación”  $\delta \left( \frac{t'_k}{t_k} \right) D_k z = \delta \left( \frac{t'_l}{t_l} \right) D_l z$  y obtenemos una ecuación  $G(z, \dots, D_l^n z) = 0$  con una serie solución  $z_0 = \frac{y_1}{t^{\mu_0}}$  de parte inicial  $z_{0,l}$ .

Entonces dividimos la ecuación precedente por el término dominante de sus coeficientes para obtener una ecuación con un cierto orden de Weierstrass, y aplicamos la hipótesis de inducción.

Para acabar la prueba, tenemos que justificar los cambios de derivación  $y' = \delta \left( \frac{t'_k}{t_k} \right) D_k y$  y  $\delta \left( \frac{t'_l}{t_l} \right) D_l y = \delta \left( \frac{t'_k}{t_k} \right) D_k y$  con  $l < k$ .

En el primer caso, el cambio no es bien definido cuando  $v \left( \frac{t'_k}{t_k} \right) < (0, \dots, 0)$  (los coeficientes que proceden del cambio tienen valor negativo). Así lo “componemos con la explosión”  $y = \delta \left( \frac{t'_1}{t_1} \right)^n z$  que es bien definida ya que hemos



supuesto que  $v(y_0) > \max \left\{ (0, \dots, 0), -nv \left( \frac{t'_1}{t_1} \right) \right\}$ .

En el segundo caso, el cambio no es bien definido en general. Así lo “componemos con la explosión”  $y = \left( \frac{\delta \left( \frac{t'_1}{t_1} \right)}{\delta \left( \frac{t'_k}{t_k} \right)} \right)^{2n} z$ , verificando que este cambio de variable es bien definido.

## Referencias

- [AD05] Matthias Aschenbrenner y Lou van den Dries. *Asymptotic differential algebra*. En *Analyzable functions and applications, Contemp. Math.*, tomo 373, Amer. Math. Soc., Providence, RI, págs. 49–85, 2005.
- [Bla06] Jesús del Blanco Maraña. *Cuerpos de series generalizadas y cuerpos de Hardy*. tesis doctoral, Universidad de Valladolid, 2006.
- [Can93] José Cano. *On the series defined by differential equations, with an extension of the Puiseux polygon construction to these equations*. *Analysis* **13**, 103–119, 1993.
- [CMR05] F. Cano, R. Moussu y J.-P. Rolin. *Non-oscillating integral curves and valuations*. *J. Reine Angew. Math.* **582**, 107–141, 2005.
- [DMM94] Lou van den Dries, Angus Macintyre y David Marker. *The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation*. *Ann. of Math.* (2) **140**, 183–205, 1994.
- [Dri84] Lou van den Dries. *Remarks on Tarski’s problem concerning  $(\mathbf{R}, +, \cdot, \exp)$* . En *Logic colloquium ’82 (Florence, 1982)*, North-Holland, Amsterdam, págs. 97–121, 1984.
- [Dri86] ——. *A generalization of the Tarski-Seidenberg theorem, and some nondefinability results*. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **15**, 189–193, 1986.
- [Éca92] Jean Écalle. *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. *Actualités Mathématiques.*, Hermann, Paris, 1992.
- [GS91] D. Y. Grigoriev y M. F. Singer. *Solving ordinary differential equations in terms of series with real exponents*. *Transactions Amer. Math. Soc.* **327**, 329–351, 1991.
- [Hah07] H. Hahn. *Über die nichtarchimedischen GröSS ensystem*. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch - Naturwissenschaftliche Klasse* **116**, 601–655, 1907.

- [Hoe97] Joris van der Hoeven. *Asymptotique automatique*. tesis doctoral, Université Paris VII, 1997.
- [Hoe06] ——. *Transseries and real differential algebra*, *Lecture Notes in Mathematics*, tomo 1888. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [KKS97] Franz-Viktor Kuhlmann, Salma Kuhlmann y Saharon Shelah. *Exponentiation in power series fields*. Proc. Amer. Math. Soc. **125**, 3177–3183, 1997.
- [KP02] Steven G. Krantz y Harold R. Parks. *A primer of real analytic functions*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher., Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, segunda ed<sup>ón</sup>., 2002.
- [LR97] J.-M. Lion y J.-P. Rolin. *Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **47**, 859–884, 1997.
- [MR06] Mickaël Matusinski y Jean-Philippe Rolin. *Generalised power series solutions of sub-analytic differential equations*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **342**, 99–102, 2006.
- [Ros83] Maxwell Rosenlicht. *The rank of a Hardy field*. Trans. Amer. Math. Soc. **280**, 659–671, 1983.

# Sobre a densidade de folheações sem soluções algébricas

Jorge Vitório Pereira

Agradeço S. C. Coutinho pela leitura atenciosa de uma primeira versão destas notas.

## 1 Introdução

O objetivo central destas notas é apresentar uma prova do célebre Teorema de Jouanolou:

**Teorema 1.** *Uma folheação genérica de grau maior ou igual a 2 em  $\mathbb{P}^2$  não admite nenhuma curva algébrica invariante.*

A estratégia adoptada para a demonstração é a mesma de [CP05], onde o Teorema de Jouanolou é generalizado para folheações de dimensão um em variedades projetivas arbitrárias. Apesar da abordagem ser essencialmente a mesma, ao restringir-me a folheações em  $\mathbb{P}^2$  uma série de dificuldades técnicas simplificam-se enormemente. Evito assim também as questões relacionadas a conjuntos algébricos invariantes de dimensão estritamente maior que um. Acredito que este texto possa ser uma útil primeira leitura para aqueles interessados nos resultados de [CP05].

## 2 Folheações holomorfas em $\mathbb{P}^2$

Seja  $d \geq 0$  um inteiro e  $x, y, z$  coordenadas homogêneas de  $\mathbb{P}^2$ . Uma *folheação holomorfa singular*  $\mathcal{F}$  de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^2$  é definida por uma 1-forma

$$\Omega = Adx + Bdy + Cdz,$$

com  $A, B, C \in \mathbb{C}[x, y, z]$  polinômios homogêneos de grau  $d + 1$  satisfazendo a relação de Euler

$$\Omega \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) = xA + yB + zC = 0.$$

O conjunto singular de  $\mathcal{F}$ , denotado por  $\text{sing}(\mathcal{F})$ , é o subconjunto de  $\mathbb{P}^2$  formado pelos zeros comuns de  $A, B$  e  $C$ . Quando este conjunto é finito dizemos que

a folheação  $\mathcal{F}$  é *saturada*. Para folheações saturadas, segue de um Teorema de Darboux, que existem exatamente  $d^2 + d + 1$  singularidades contadas com multiplicidades (ver [Br00], [LS97]).

Observe que ao restringir  $\Omega$  à uma reta  $L$  de  $\mathbb{P}^2$ , por exemplo  $L = \{z = 0\}$ , vale a igualdade

$$i^*\Omega = H_d(x, y)(xdy - ydx),$$

onde  $i(x, y) = (x, y, 0)$  induz a inclusão da reta  $L$  em  $\mathbb{P}^2$  e  $H_d \in \mathbb{C}[x, y]$  é um polinômio homogêneo de grau  $d$ . Quando  $H_d$  é identicamente zero diz-se que  $L$  é  $\mathcal{F}$ -invariante. Caso contrário os zeros de  $H_d$  definem  $d$  pontos em  $L$ , os pontos de tangência entre a folheação  $\mathcal{F}$  e a reta  $L$ . Eis portanto a definição geométrica do grau de uma folheação de  $\mathbb{P}^2$ : o número de tangências (contadas com multiplicidades) de  $\mathcal{F}$  com uma reta  $L$  não  $\mathcal{F}$ -invariante.

O  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial das 1-formas descritas acima é usualmente denotado por  $H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(d+2))$ . Com o intuito de *enxugar* a notação faremos  $\Sigma_d = H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(d+2))$ . Um cálculo elementar mostra que

$$\dim_{\mathbb{C}} \Sigma_d = d^2 + 4d + 3$$

Duas formas  $\Omega$  e  $\Omega'$  definem a mesma folheação se, e somente se, diferem pela multiplicação por uma constante complexa não nula. Desta forma  $\mathbb{F}ol(d)$ , o espaço das folheações de grau  $d$ , identifica-se naturalmente com  $\mathbb{P}(\Sigma_d)$ .

Se denotamos por  $S_k \subset \mathbb{C}[x, y, z]$  o  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial formado pelos polinômios homogêneos de grau  $k$  vemos que para  $1 \leq k \leq d$  temos uma aplicação natural

$$\begin{aligned} \varphi_k : \mathbb{P}(S_k) \times \mathbb{F}ol(d-k) &\rightarrow \mathbb{F}ol(d) \\ ([P], [\Omega]) &\mapsto [P\Omega]. \end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que o conjunto das folheações de grau  $d$  não saturadas é igual a

$$\bigcup_{1 \leq k \leq d} \varphi_k(\mathbb{P}(S_k) \times \mathbb{F}ol(d-k)).$$

Em particular, após contar dimensões, vemos que *quase todas* as folheações de grau  $d$  são saturadas.

### 3 Curvas algébricas invariantes

Sejam  $\mathcal{F}$  uma folheação de  $\mathbb{P}^2$  de grau  $d$  definida pela 1-forma  $\Omega$  e  $C \subset \mathbb{P}^2$  uma curva algébrica irredutível. Analogamente ao caso de retas dizemos que  $C$  é  $\mathcal{F}$ -invariante se  $i^*\Omega \equiv 0$ , onde  $i : C_{lisa} \rightarrow \mathbb{C}^3$  induz a inclusão da parte lisa de  $C$  em  $\mathbb{P}^2$ . Se  $C$  é definida pelo polinômio homogêneo irredutível  $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$  o fato de  $C$  ser  $\mathcal{F}$ -invariante traduz-se na existência de uma 2-forma polinomial  $\Theta_F$  com coeficientes homogêneos de grau  $d$  tal que

$$\Omega \wedge dF - F\Theta_F = 0. \tag{1}$$

Reciprocamente se vale a relação acima então a curva definida por  $\mathcal{F}$  é invariante.

O interessante da relação (1) é que ela funciona igualmente bem para polinômios homogêneos não-reduzidos, i.e., se a decomposição em fatores primos de  $F$  é igual a  $F_1^{n_1} \cdots F_i^{n_i}$  então a relação (1) é satisfeita se, e somente se, cada um dos  $F_j$  define uma curva algébrica  $\mathcal{F}$ -invariante.

Considere os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_k(d) &= \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(d) \mid \text{existe curva } \mathcal{F}\text{-invariante de grau } k\} \\ \mathcal{D}_k(d) &= \{(x, \mathcal{F}) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d) \mid x \text{ pertence a uma curva } \mathcal{F}\text{-invariante de grau } k\} \end{aligned}$$

Aqui por curvas  $\mathcal{F}$ -invariantes de grau  $k$  refiro-me a curvas não necessariamente reduzidas tais que **todas** as componentes irredutíveis são  $\mathcal{F}$ -invariantes.

**Proposição 1.** *Os conjuntos  $\mathcal{C}_k(d)$  e  $\mathcal{D}_k(d)$  são fechados algébricos.*

*Demonstração.* Denotarei por  $\Lambda_d$  o  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial das 2-formas em  $\mathbb{C}^3$  com coeficientes homogêneos de grau  $d$ . Considere

$$\mathcal{Z}_k(d) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}(\Sigma_d \times \Lambda_d) \times \mathbb{P}(S_k)$$

o subconjunto definido por

$$\mathcal{Z}_k(d) = \{(x, [(\Omega, \Theta)], [F]) \mid \Omega \wedge dF - F\Theta = 0 \text{ e } F(x) = 0\}.$$

Observe que o lugar de indeterminação da aplicação racional

$$\pi : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}(\Sigma_d \times \Lambda_d) \times \mathbb{P}(S_k) \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d) \times \mathbb{P}(S_k)$$

não intersecta  $\mathcal{Z}_k(d)$ . Portanto a restrição de  $\pi$  à  $\mathcal{Z}_k(d)$  é regular, i.e., holomorfa. Como  $\mathcal{Z}_k(d)$  é claramente um fechado algébrico temos que  $\pi(\mathcal{Z}_k(d))$  também é um fechado algébrico.

Para concluir basta observar que  $\mathcal{C}_k(d)$  é a imagem de  $\pi(\mathcal{Z}_k(d))$  via a projeção

$$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d) \times \mathbb{P}(S_k) \rightarrow \mathbb{F}ol(d)$$

e que  $\mathcal{D}_k(d)$ , por sua vez, é a imagem de  $\pi(\mathcal{Z}_k(d))$  via a projeção

$$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d) \times \mathbb{P}(S_k) \rightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d).$$

□

## 4 O conjunto singular universal é irredutível

Seja  $\mathcal{S}(d) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d)$  o subconjunto definido por

$$\mathcal{S}(d) = \{(x, \mathcal{F}) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d) \mid x \in \text{sing}(\mathcal{F})\}.$$

**Proposição 2.** *Para qualquer  $d \geq 0$ ,  $\mathcal{S}(d)$  é uma subvariedade irredutível e de codimensão dois de  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d)$ .*

*Demonstração.* Considere a projeção  $\pi : \mathcal{S}(d) \rightarrow \mathbb{P}^2$ . A cada ponto  $x \in \mathbb{P}^2$  a fibra  $\pi^{-1}(x)$  é uma subvariedade de  $\{x\} \times \mathbb{F}ol(d)$  contida em  $\mathcal{S}(d)$  isomorfa à um espaço projetivo (se duas formas  $\Omega$  e  $\Omega'$  anulam-se em  $x$  então o mesmo vale para qualquer combinação linear das mesmas). Como  $\mathbb{P}^2$  é homogêneo (i.e., o grupo de biholomorfismos age transitivamente) segue que todas as fibras de  $\pi$  são lisas, irredutíveis, biholomorfas e, em particular, de mesma dimensão. Não é difícil ver que isto implica que  $\mathcal{S}(d)$  é irredutível, cf. [Sh94, Theorem 8, página 77].

Resta mostrar que  $\mathcal{S}(d)$  tem codimensão dois. Para tanto basta analisar a fibra sobre  $p = [0 : 0 : 1]$  e concluir que esta tem codimensão dois em  $\{p\} \times \mathbb{F}ol(d)$ . Se  $H \in \mathbb{C}[x, y, z]$  é um polinômio homogêneo de grau  $d$  que não se anula em  $p$  então as 1-formas  $\Omega_1 = H(xdz - zdx)$  e  $\Omega_2 = H(ydz - zdy)$  pertencem a  $\Sigma_d$  e são tais que

$$\lambda\Omega_1(p) + \mu\Omega_2(p) = -\lambda H(0, 0, 1)dx - \mu H(0, 0, 1)dy = 0$$

para números complexos  $\lambda, \mu$ , implica que  $\lambda = \mu = 0$ . Verifica-se também que para qualquer forma  $\Omega \in \Sigma_d$  tal que  $\Omega(p) \neq 0$  pode-se escrever  $\Omega(p)$  como uma combinação  $\mathbb{C}$ -linear de  $\Omega_1(p)$  e  $\Omega_2(p)$ . Isto é suficiente para concluir que a fibra de  $\pi$  sobre  $p = [0 : 0 : 1]$  tem codimensão dois em  $\{p\} \times \mathbb{F}ol(d)$ .<sup>1</sup>  $\square$

## 5 Localização

Na prova do próximo resultado farei uso do seguinte:

**Lema 1.** *Se  $\mathcal{F}$  é uma folheação de  $\mathbb{P}^2$  e  $C$  é uma curva algébrica  $\mathcal{F}$ -invariante então*

$$C \cap \text{sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset.$$

*Demonstração.* Vou supor que  $C \cap \text{sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$  e que  $C$  é o conjunto de zeros do polinômio homogêneo reduzido  $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ .

Ao observar que  $\text{sing}(C) \subset C \cap \text{sing}(\mathcal{F})$  deduzo que  $C$  é lisa e, consequentemente que  $F$  é irredutível. Como  $C$  é  $\mathcal{F}$ -invariante e  $\text{sing}(\mathcal{F})$  não intersecta  $C$  então para todo  $p \in \{F = 0\}$  existe  $H(p) \in \mathbb{C}^*$  tal que  $\Omega(p) = H(p) \cdot dF(p)$ . Logo existe  $H \in \mathbb{C}[x, y, z]$  satisfazendo

$$\Omega = H \cdot dF \pmod{F}.$$

Em outros termos: existe  $\eta$ , uma 1-forma polinomial homogênea em  $\mathbb{C}^3$ , tal que

$$\Omega = H \cdot dF + F \cdot \eta. \tag{2}$$

Desta última equação deduzo que

$$\emptyset = C \cap \text{sing}(\mathcal{F}) = \{F = 0\} \cap \{H = 0\}.$$

<sup>1</sup>O que está realmente por trás da prova apresentada de que a codimensão de  $\mathcal{S}(d)$  é igual a dois é a isotropicidade de  $\mathbb{P}^2$ , i.e., o grupo de biholomorfismos de  $\mathbb{P}^2$  induz uma ação transitiva em  $\mathbb{P}(T\mathbb{P}^2)$ , a projetivização do fibrado tangente.

Segue do Teorema de Bezout que o grau de  $H$  é zero, i.e.,  $H$  é uma constante. Comparando graus em (2) deduzo também que  $\eta = 0$ . Finalmente ao fazer o produto interior de (2) pelo campo radial obtenho que

$$0 = \Omega \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) = HdF \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) = \text{grau}(F)HF.$$

Um absurdo que assegura a validade do lema.<sup>2</sup>  $\square$

**Proposição 3.** *Se para algum inteiro  $k \geq 0$  vale que  $\mathcal{C}_k(d) = \mathbb{F}ol(d)$  então*

$$\mathcal{D}_k(d) \cap \mathcal{S}(d) = \mathcal{S}(d).$$

*Demonstração.* Se  $\mathcal{C}_k(d) = \mathbb{F}ol(d)$  então toda folheação de grau  $d$  admite uma curva algébrica invariante de grau  $k$  (eventualmente não-reduzida). Ao denotar por  $\pi$  a projeção natural

$$\pi : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}ol(d) \rightarrow \mathbb{F}ol(d)$$

segue do lema 1 que

$$\pi(\mathcal{S}(d) \cap \mathcal{D}_k(d)) = \mathcal{C}_k(d).$$

Como  $\mathcal{S}(d)$  é irredutível e  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(d) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{F}ol(d)$  segue da igualdade acima que

$$\mathcal{D}_k(d) \cap \mathcal{S}(d) = \mathcal{S}(d),$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

Um minuto de reflexão é suficiente para ver que quando válida a conclusão da proposição acima temos que por toda singularidade de toda folheação  $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(d)$  passa uma curva  $\mathcal{F}$ -invariante (não necessariamente reduzida) de grau  $k$ .

## 6 Existência de singularidades sem separatriz algébrica

Seja  $\Omega \in \Sigma_d$ ,  $d \geq 2$ , dada por

$$\Omega = x^{d-1}yz(x+y+z) \left( \lambda \frac{dx}{x} + \mu \frac{dy}{y} + \gamma \frac{dz}{z} - (\lambda + \mu + \gamma) \frac{d(x+y+z)}{x+y+z} \right).$$

As singularidades de  $\Omega$  são:

$$[0 : 0 : 1], [0 : 1 : 0], [1 : 0 : 0], [0 : 1 : -1], [1 : 0 : -1], [1 : -1 : 0] \text{ e } [\lambda : \mu : \gamma],$$

além da reta  $\{x = 0\}$  quando  $d \geq 3$ .

<sup>2</sup>Cabe observar que este lema é uma consequência imediata do Teorema do Índice de Camacho-Sad. A prova *elementar* aqui apresentada me foi sugerida por S.C. Coutinho. Uma variante desta pode ser encontrada em [Jo79, Proposition 4.1, página 126].

É útil observar que a folheação induzida por  $\Omega$  admite uma integral primeira multi-valorada, a saber,

$$F(x, y, z) = \frac{x^\lambda y^\mu z^\gamma}{(x + y + z)^{\lambda + \mu + \gamma}}.$$

**Lema 2.** *Seja  $\mathcal{F} \in \mathbb{Fol}(d)$ ,  $d \geq 2$ , a folheação induzida por  $\Omega$ . Se  $\lambda, \mu$  e  $\gamma$  são  $\mathbb{Z}$ -linearmente independentes então não passa nenhuma curva algébrica  $\mathcal{F}$ -invariante pela singularidade  $p = [\lambda : \mu : \gamma]$ .*

*Demonstração.* Como  $\lambda, \mu$  e  $\gamma$  são  $\mathbb{Z}$ -linearmente independentes temos que  $p$  não pertence a nenhuma das quatro retas  $\{x = 0\}, \{y = 0\}, \{z = 0\}, \{x + y + z = 0\}$ . Supondo que existe uma curva  $\mathcal{F}$ -invariante  $C$  que passa por  $p$  vou considerar a sua interseção com uma das quatro retas supra-citadas, por exemplo,  $\{z = 0\}$ .

Claramente os pontos de interseção entre  $C$  e  $\{z = 0\}$  estão contidos nas singularidades de  $\mathcal{F}$  e, portanto encontram-se na interseção entre  $\{z = 0\}$  e uma das três outras retas. Seja  $q$  um destes pontos de interseção entre  $C$  e  $\{z = 0\}$ . Podemos supor sem perda de generalidade que  $q$  também pertence a  $\{y = 0\}$  (os outros casos são completamente análogos).

Em uma vizinhança de  $q$  a integral primeira  $F$  escreve-se como

$$F(x, y, 1) = u(x, y)x^\lambda y^\mu,$$

onde  $u$  é uma função não nula e sem ramificação em uma vizinhança de  $q = (0, 0)$ . Novamente pela  $\mathbb{Z}$ -independência linear de  $\lambda, \mu$  e  $\gamma$  temos que  $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$ . Não é difícil verificar que isto implica que as únicas separatrizes holomorfas que passam por  $q$  são  $\{x = 0\}$  e  $\{y = 0\}$ . Concluo assim a prova de lema.  $\square$

**Corolário 1.** *Se  $d \geq 2$  então  $\mathcal{C}_k(d) \neq \mathbb{Fol}(d)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Se  $\mathcal{C}_k(d) = \mathbb{Fol}(d)$  para algum  $k \in \mathbb{N}$  então segue da proposição 3 que por toda singularidade de toda folheação  $\mathcal{F}$  de grau  $d$  passa ao menos uma curva algébrica  $\mathcal{F}$ -invariante contradizendo o lema 2.  $\square$

## 7 Conclusão

Como  $\mathcal{C}_k(d)$  é um fechado algébrico de  $\mathbb{Fol}(d)$  e, para  $d \geq 2$ ,  $\mathcal{C}_k(d) \neq \mathbb{Fol}(d)$  vale que, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , o complementar de  $\mathcal{C}_k(d)$  em  $\mathbb{Fol}(d)$  é um aberto denso desde que  $d \geq 2$ . Concluo a prova do Teorema de Jouanolou aplicando o Teorema de Baire: uma interseção enumerável de abertos densos é denso.

## Referências

- [Br00] M. Brunella, *Birational geometry of foliations*. Publicações do IMPA, 2000.



- [CP05] S. C. Coutinho e J. V. Pereira, *On the density of foliations without algebraic invariant sets*. aparecerá no Journal für die Reine und Angewandte Mathematik.
- [Jo79] J. P. Jouanolou, *Equations de Pfaff Algébriques*. Lecture Notes in Math. **708**, Springer, 1979
- [LS97] A. Lins Neto e B. Scárdua, *Folheações Algébricas Complexas*. IMPA, 21º Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, 1997.
- [Sh94] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry. 1. Varieties in projective space*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Second edition. Tradução do russo (1988) por Miles Reid.

Jorge Vitório Pereira  
IMPA, Estrada Dona Castorina, 110.  
22460-320 Jardim Botânico  
Rio de Janeiro, Brasil  
E-mail: [jvp@impa.br](mailto:jvp@impa.br)



# The Nash problem of arcs

CAMILLE PLÉNAT

## Abstract

This paper originates in the conference given at the seminar of Tordeillas on the Nash problem of arcs. The aim of the conference was to introduce the problem of Nash in all dimensions and to show some results about it, results most of them obtained with P. Popescu-Pampu.

## 1 Introduction.

At the beginning of the sixties, H. Hironaka proved that any algebraic variety over a field of characteristic 0 admits a resolution of singularities. In order to compare the possible resolutions, J. Nash proposed in [N] to study the space of formal parametrized curves passing through the singular locus ; in particular, in the case of surfaces he wanted to compare this space with the exceptional set of the minimal resolution of the surface, formulating a problem now called “the Nash problem of arcs”.

The aim of the talk is to present some results around this problem, in dimension 2 and higher <sup>1</sup>. The reader can find proofs in the three following papers: [P2], [PP1] and [PP2]. But first I recall the problem itself; the presentation is largely inspired by the work of M. Lejeune ([L1]), on one hand, and S.Ishii and J.Kollar ([IK]) on the other hand.

## 2 The Nash Problem of arcs.

In the following I will consider a germ  $(S, 0)$  of normal complex algebraic variety with an isolated singularity at 0. Let  $\pi : (\tilde{S}, E) \longrightarrow (S, 0)$  be a resolution, i.e. a birational proper morphism from a smooth variety  $\tilde{S}$  to  $S$ , which is an isomorphism out of the exceptional set  $E = \pi^{-1}(0)$ .

**Definition 1.** *An essential component of  $\pi$  is an irreducible component of  $E$  such that its birational transform is an irreducible component of the exceptional set of any resolution of  $S$ .*

**Definition 2.** *The equivalence classes of essential components for all resolutions are called essential divisors.*

---

<sup>1</sup>The formulation in dimension greater than 3 has been done by S. Ishii and J. Kollar in [IK]

**Some remarks:**

- The reason of this name is that there always exists a divisor as a representant of the class.
- For surfaces the essential divisors are the ones appearing in the minimal resolution; they are represented by divisors in all resolutions.

On  $S$  we consider the set of arcs (i.e. formal parametrized curves) passing through 0:

**Definition 3.** *An arc is a local  $\mathbb{C}$ -morphism  $\mathcal{O}_{S,0} \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ . We denote  $H$  the space formed by the arcs passing through 0.*

Nash remarked that the strict transform on  $\tilde{S}$  of a general arc intersects transversally only one component of the exceptional locus at its generic point (the fact that any arc has a strict transform comes from the fact that  $\pi$  is proper). He proposed the following decomposition of the space  $H$  : let  $N_i$  be the set of arcs lifting transversally to  $E_i$  but not intersecting any other exceptional divisor  $E_j$ . Then  $H = \bigcup_{i \in \Delta} \overline{N_i}$  and the set  $\overline{N_i}$  is an irreducible algebraic subset of the space of arcs (the proofs are not in the original paper of Nash, but done by M. Lejeune (in [L2]) ). Thus he could define the following map:

$$N : \{ \text{components of } H \} \rightarrow \{ \text{essential divisors} \}$$

$$\phi \rightarrow \overline{\phi * (0)}$$

and the previous remarks show that this map is injective. Thus a natural question is

**Problem 1.** *(Nash) Is  $N$  surjective?*

This is equivalent to the question :

**Problem 2.** *(Nash) Is  $H = \bigcup_{i \in \Delta} \overline{N_i}$  the decomposition of  $H$  into its irreducible components, i.e. do we have  $\overline{N_i} \not\subset \overline{N_j}$  for all  $i \neq j$ ?*

Since Nash's paper, some answers have been given; we can notice among them the works of M. Lejeune and A. Reguera on the wedge problem ([L1]) and the equivalence between the two problems ([R2]), the case of sandwich singularities ([LR]) and of the minimal surface singularities ([R1]). In 2000, in [IK], S. Ishii and J. Kollar gave a positive answer for toric varieties after defining the problem in all dimension (one can find the notion of essential components in the work of C. Bouvier and G. Gonzalez-Sprinberg, [BG] ), and a counterexample in dimension 4. A proof for  $D_n$  has been given in 2005 ([P3]). More recently Ishii and Gonzalez-Perez have given a positive answer for quasi ordinary singularities (cf. [I] and [G]).

In the following, we will discuss the results obtained with P. Popescu-Pampu; they are based on the following valuative criterion.

### 3 The valuative criterion.

**Proposition 3.** *Let  $(S, 0)$  be a germ of normal variety with an isolated singularity. Let  $E_i$  and  $E_j$  be two essential divisors.*

*If there exists a function  $f \in \mathcal{O}_{(S,0)}$  such that  $\text{ord}_{E_i} f < \text{ord}_{E_j} f$ , then  $\overline{N}_i \not\subset \overline{N}_j$ .*

This generalizes a criterion found by Reguera [R1] for rational surface singularities. The original one is written in dual form. Our formulation adapts better to our purpose.

As remarked by F.Cano, it allows to show that there is never an equality between two subsets  $\overline{N}_i$  and  $\overline{N}_j$ : in fact the centers of the valuations  $\text{ord}_{E_i}$  and  $\text{ord}_{E_j}$  are different. Thus there exists  $F = \frac{f}{g}$  in the field of fractions of  $\mathcal{O}_{(S,0)}$  such that  $\text{ord}_{E_i} F \neq \text{ord}_{E_j} F$ , which implies that either  $\text{ord}_{E_i} f \neq \text{ord}_{E_j} f$  or  $\text{ord}_{E_i} g \neq \text{ord}_{E_j} g$ .

### 4 The results.

Thanks to the previous criterion one can remark that a way to solve Nash's problem is to find enough functions satisfying its hypothesis : we would like to realize an effective cycle  $D = \sum a_i E_i$  with  $E_i$  the essential components, the coefficients  $a_i > 0$ , as the exceptional part of the lifting of a regular function  $f \in \mathcal{O}_{(S,0)}$  (i.e. such that  $\text{ord}_{E_i} f = a_i$ ).

#### 4.1 In dimension two.

A very well known result in this sense is Artin's theorem for a rational surface singularity:

**Theorem 4.** *(Artin) let  $(S, 0)$  be a rational surface singularity.*

*Let  $\pi : (\tilde{S}, 0) \rightarrow (S, 0)$  be the minimal resolution.*

*Let  $D = \sum a_i E_i$  with  $a_i > 0$  such that  $D.E_j \leq 0$  for all  $j$ . Then there exists a function  $f \in \mathcal{O}_{(S,0)}$  such that  $\text{ord}_{E_i} f = a_i$ .*

By combining these two results, I have been able to solve the problem for minimal singularities ([P2]). But this criterion is not strong enough to solve the problem for all rational singularities; in fact there exist singularities for which the criterion does not show all the non inclusions (for example the class  $(D_n)_{n \geq 4}$ , cf. [P3]).

For non rational singularities, Artin's theorem does not work. By constructing a variation of a theorem proved in [CNP] by C. Caubel, A. Nemethi and P. Popescu-Pampu, we proved a proposition valid for any normal surface singularity :

**Proposition 5.** *Let  $D$  be an effective purely exceptional divisor, such that for any  $i, j \in I$ , one has the inequality:*

$$(D + E_i + K_{\mathcal{S}}) \cdot E_j + 2\delta_i^j \leq 0$$

where  $\delta_i^j$  is Kronecker's symbol. Then there exists a function  $f \in \mathfrak{m}_{S,0}$  such that the exceptional part of  $\text{div}(f \circ \pi)$  is precisely  $D$ .

Thus, thanks to this proposition, we (in [PP1]) can create an infinite family of non-rational surface singularities with the Nash map  $N$  bijective.

Inside the real vector space with basis  $(E_i)_{i \in I}$ , we consider the open half-spaces:

$$\Delta_{ij} = \left\{ \sum_{i \in I} a_i E_i \mid a_i < a_j \right\}$$

for each  $i \neq j$ . We call them *the fundamental half-spaces* of  $\pi$ .

**Definition 4.** *We call **Lipman semigroup** of  $\pi$  the subset:*

$$\mathcal{L}(\pi) := \{D \in \mathcal{L}(\pi) \mid D \cdot E_i \leq 0, \forall i \in I\}$$

*We call **strict Lipman semigroup** of  $\pi$  the subset:*

$$\mathcal{L}^\circ(\pi) := \{D \in \mathcal{L}(\pi) \mid D \cdot E_i < 0, \forall i \in I\}$$

*of the Lipman semigroup of  $\pi$ . It is always non-empty.*

**Proposition 6.** *Suppose that  $(\mathcal{S}, 0)$  verifies the following condition: the intersection of  $\mathcal{L}^\circ(\pi_m)$  with each fundamental half-space is non-empty; then the Nash map  $\mathcal{N}$  is bijective.*

*Proof.* Let  $E_i$  and  $E_j$  be two essential components of  $E$ . Then as  $\mathcal{L}^\circ(\pi) \cap \Delta_{ij} \neq \emptyset$ , there exists  $F_{ij} = \sum_k a_k E_k$  such that  $F_{ij} \cdot E_k < 0$ . Then for  $n$  big enough, we have

$$(nF_{ij} + E_i + K_{\mathcal{S}}) \cdot E_j + 2\delta_i^j \leq 0$$

At the same time one has  $na_i < na_j$ . We can apply the criterion and we obtain  $\overline{N}_i \not\subset \overline{N}_j$  by proposition 5.  $\square$

The next question is how to generalize this construction to higher dimensional normal varieties with an isolated singularity.

## 4.2 Higher dimensional varieties

Let  $(X, 0)$  be a normal variety with an isolated singularity at 0. Let  $\pi : (\tilde{X}, E) \rightarrow (X, 0)$  be a divisorial resolution of  $(X, 0)$  and  $E_1, \dots, E_n$  be the essential divisors. Let  $\Delta_{ij} = \left\{ \sum_{i \in I} a_i E_i \mid a_i < a_j \right\}$  be the fundamental half space of the cone generated by  $(\{E_i\})_{1 \leq i \leq n}$ .

The referee of the paper [PP1] made us the following remark (for surfaces):  
 Let  $F_{ij} = \sum_k a_k E_k \in \Delta_{ij}$ . Suppose that the sheaf  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-F_{ij})$  of holomorphic functions vanishing on  $E_i$  at least at order  $a_i$  is generated by global sections. Then there exists a function  $f : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$  such that  $\text{ord}_{E_i} f = a_i$ . Because  $(X, 0)$  is normal, we then have  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$  with  $\text{ord}_{E_i} g = a_i$ .

This remark, which is true in dimension higher than 2, allows us to formulate the following theorem:

**Theorem 7.** *If for all  $i, j$  there exists a cycle  $F_{ij} \in \Delta_{ij}$  with  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-F_{ij})$  ample, then the Nash map is surjective.*

Naturally the proof is easy as ampleness implies generation by global sections. The difficulties we met here were to show that the set of normal varieties with an isolated singularity satisfying the hypothesis was not empty. In fact we had to find a variety with enough ample sheaves. We did this by using Kleiman's criterion for ampleness

**Theorem 8. (Kleiman's criterion)** *Let  $X$  be a projective variety. The cone of curves*

$$NE(X) \in N_1(X)$$

*is the cone spanned by the classes of all effective one-cycles on  $X$ . A Cartier divisor  $D$  on  $X$  is ample if and only if  $D \cdot z > 0$  for all non zero  $z \in \overline{NE(X)}$ .*

The computations, given a normal singular variety and one of its resolutions, are not easy because the computation of the cone of curves is itself very hard. Thus we decided to construct first compact surfaces with closed cones of curves, then to embed them conveniently in an algebraic manifold of dimension 3, such that they become exceptional in it, a property detected using Grauert's criterion of contractibility. For the construction, we refer to [PP2].

## References

- [BG] C. Bouvier, G. Gonzalez-Sprinberg, *Système générateur minimal, diviseurs essentiels et  $G$ -désingularisations de varités toriques*. *Tohoku Math. J.* 47 (1995), 125–149.
- [CNP] C. Caubel, A. Némethi, P. Popescu-Pampu, *Milnor open books and Milnor fillable contact 3-manifolds*. *Topology* 45 (2006), 673–689.
- [G] P.D. González Pérez, *Bijectiveness of the Nash map for quasi-ordinary hypersurface singularities*. Manuscript, 2007.
- [IK] S. Ishii, J. Kollár, *The Nash problem on arc families of singularities*. *Duke Math. J.* 120, 3 (2003), 601–620
- [I] S. Ishii, *The local Nash problem on arc families of singularities*. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 56 no. 4 (2006), 1207–1224.

- [L1] M. Lejeune-Jalabert, *Arcs analytiques et résolution minimale des singularités des surfaces quasi-homogènes*. Séminaire sur les Singularités des Surfaces. Lecture Notes in Math. vol. 777 (Springer-Verlag, 1980), 303–336.
- [L2] M. Lejeune-Jalabert, *Courbes tracées sur un germe d'hypersurface*. Amer. J. Math. 112 (1990), 525–568.
- [LR] M. Lejeune-Jalabert, A. Reguera, *Arcs and wedges on sandwiched surface singularities*. Amer. J. Math. 121 (1999), 1191–1213.
- [N] J. F. Nash, Jr., *Arc structure of singularities*. A celebration of John F. Nash, Jr. Duke Math. J. 81, 1 (1995), 31–38 .
- [P1] C. Plénat, *Résolution du problème des arcs de Nash pour les points doubles rationnels  $D_n$  ( $n \geq 4$ )*. Thèse, Univ. Paul Sabatier, Toulouse, Septembre 2004.
- [P2] C. Plénat, *A propos du problème des arcs de Nash*. Ann. Inst. Fourier 55, 3 (2005), 805–823
- [P3] C. Plénat, *Résolution du problème des arcs de Nash pour les points doubles rationnels  $D_n$  ( $n \geq 4$ )*. Note C.R.A.S, Série I 340 (2005) 747–750
- [PP1] C. Plénat, P. Popescu-Pampu, *"A class of non-rational surface singularities for which the Nash map is bijective"*, Bulletin de la SMF, 134, 3 (2006) 383–394.
- [PP2] C. Plénat, P. Popescu-Pampu, *"Families of higher dimensional germs with bijective Nash map"*, Arxiv.
- [R1] A. Reguera, *Families of arcs on rational surface singularities*. Manuscripta Math, 88, 3 (1995) 321–333
- [R2] A. Reguera, *Image of the Nash map in terms of wedges*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 385–390.

Camille Plénat  
Université de Provence, LATP UMR 6632  
Centre de Mathématiques et Informatique, 39 rue  
Joliot-Curie, 13453  
Marseille cedex 13, France.  
plenat@cmi.univ-mrs.fr



## ÍNDICE

- C.R. Giraldo: *Matrices de Zorn sobre  $\mathbb{Z}$  e subloops de índice finito.* 3-19
- Á. Lozano Rojo: *Espacios foliados definidos por grafos.* 21-38
- M. Matusinski: *Soporte de las soluciones de ecuaciones diferenciales con coeficientes en cuerpos de series generalizadas de rango finito.* 39-50
- J.V. Pereira: *Sobre a densidade de folheações sem soluções algébricas.* 51-57
- C. Plénat: *The Nash problem of arcs.* 59-64

## ARTÍCULOS DE PRÓXIMA APARICIÓN

- F. Alcalde Cuesta y P. González Sequeiros: *Espacios foliados definidos por mosaicos.*
- F.E. Brochero Martínez: *Dinámica de difeomorfismos dicríticos en  $(\mathbb{C}^n, 0)$ .*
- F. Cano: *Dicriticidad de foliaciones holomorfas de codimensión uno.*
- F. Cano, C. Roche y M. Spivakovsky: *Uniformización local en característica cero.*
- A. Lastra: *Operadores de extensión para el problema de momentos de Stieltjes en los espacios de Gelfand-Shilov clásicos.*
- M. Macho Stadler: *Espacios foliados: el punto de vista no conmutativo.*
- D. Marín: *La topología de las hojas de ciertas foliaciones singulares.*
- S. Mazuelas: *Interpretación proyectiva de las métricas del plano real.*
- D. Sauzin: *Initiation to mould calculus through the example of saddle-node singularities.*
- I. Vainsencher: *Hypersurfaces with unexpected tangencies.*